LES MATEMÀTIQUES I LA MÚSICA

EL NOMBRE D'OR I EL SEU ÚS EN LA COMPOSICIÓ MUSICAL

Autor: Francesc Fàbregas Flavià
Tutor de recerca: Judit Boronat
Data d'entrega:7/02/2008
IES Narcís Oller
2n de Batxillerat
Curs 2007-2008

“La música és un exercici d’aritmètica secreta, i aquell que s’hi lliura ignora que està manipulant nombres”
Leibniz

ÍNDEX

0.Introducció

1.*Introducció matemàtica.*
1.1. Anàlisi matemàtica del nombre d'or.....*pàgs.1-5*
1.2. Anàlisi geomètrica del nombre d'or.....*pàgs.6-12*

2. *Contextualització històrica*
2.1. El nombre d'or a Egipte.....*pàgs.13-16*
2.2. El nombre d'or a Grècia.....*pàgs.16-17*
2.3. El nombre d'or a Europa.....*pàgs.17-18*

3. *Anàlisi del nombre d'or en la composició musical*:
3.1. Sistema d'anàlsi.....*pàgs.19-20*
3.2. Anàlisi del primer moviment de la *sonata en sol menor* de Bach.....*pàgs.21-24*
3.3. Anàlisi del *preludi en re major* de J.S.Bach.....*pàgs.25-26*
3.4. Anàlisi de *Boig per tu* de Sau.....*pàgs.27-29*

4. *Aplicació del nombre d'or en la composició musical*.....*pàgs.30-36*

5. *Conclusion*s.....*pàg.37*

6. *Referències*.....*pàg.38-39*

7. *Annexos*:
7.1.Annex A. Gràfic del límit de la successió de Fibonacci.....*pàg.40*
7.2.Annex B. Partitura de J.S.Bach (primer moviment de la *sonata en sol menor per violí sol* BWV 1001) i esquemes relacionats.....*pàgs.41-44*
7.3.Annex C. Partitura de J.S.Bach (*preludi en Re major* BWV 850) i esquemes relacionats.....*pàgs.45-47*
7.4.Annex D. Correspondència amb Pep Sala. Partitura i lletra de l'obra *Boig per tu,* de Sau.....*pàgs.48-51*
7.5.Annex E. Partitura de *Pluja d'estiu*.....*pàgs.52-53*
7.6.Annex F. Ús del nombre d'or en l'arquitectura.....*pàg.54*
7.7.Annex G. Ús del nombre d'or en la pintura.....*pàg.55*
7.8.Annex H. Aparició del nombre d'or a la natura.....*pàg.56*
7.9.Annex I. Relació de cançons del CD adjunt i programari informàtic musical utilitzat.....*pàg.57*

INTRODUCCIÓ

La majoria d'estudiants coneixen en certa mesura els nombres π i e per la seva aplicació en múltiples càlculs matemàtics. Són dos nombres que gaudeixen d'un gran ressò mediàtic en l'àmbit educatiu. Ara bé, hi ha altres nombres que tenen unes propietats realment fascinadores als quals la fama no els ha somrigut i que, per aquest motiu, han romàs al marge. En el cas que ens ocupa estic fent referència, efectivament, al **nombre d'or** Φ.

Sempre que sentim a parlar d'art ens vénen al cap tot un seguit de conceptes vinculats a l'espontaneïtat, l'expressivitat i la bellesa. Aparentment, podria semblar paradoxal lligar els conceptes anteriors amb els nombres: quelcom fix, rígid i inexpressiu, que estableix tot un seguit de relacions inapel·lables. Tanmateix, el fet és que hi ha molts més lligams dels que hom podria arribar a imaginar. Precisament, el **nombre d'or** és considerat un dels misteris de la matemàtica més apassionants ja que es creu que és l'expressió numèrica que designa l'essència de la bellesa.

Durant milers d'anys l'home, conscient o inconscientment, l'ha emprat en múltiples ocasions perquè ha considerat que és estèticament agradable. A més, paral·lelament a aquest fet i sense tenir-ne constància fins fa relativament poc temps, la naturalesa des dels seus inicis ha desenvolupat diverses formes geomètriques i processos naturals seguint les directrius d'aquest nombre. Això és remarcable, ja que hi ha una coincidència plena entre els cànons estètics de l'home i la naturalesa; dos rius que conflueixen en una única expressió: **el nombre d'or**.

Fins fa poc, la meva preocupació principal a l'analitzar una obra d'art es centrava en ubicar-la en un marc temporal concret, en un context històric determinat: en un museu, tot contemplant una obra d'art, intentava recordar el moviment artístic a la qual pertanyia i qui n'era l'autor; en un concert, a l'escoltar una peça musical, tractava d'identificar la forma i les característiques de la composició i lligar-les a un context extern. Ara bé, durant una classe d'harmonia i anàlisi musical, vaig descobrir quelcom que em va atreure especialment l'atenció: l'aparició del **nombre d'or** en una peça musical. A partir de llavors, la meva perspectiva inicial d'anàlisi davant una obra artística incorpora un nou element: la matemàtica que amaga en el seu rerefons. Aquest

fet tan especial m'ha despertat un interès en aprofundir en les particularitats del nombre i la seva relació directa amb les arts, concretament amb la música.

El treball de recerca sorgeix, doncs, a arrel de l'esmentat anteriorment i, dins uns límits d'extensió i aprofundiment, pretén estudiar l'ús del nombre d'or en la composició musical com a element estructural i aplicar les seves directrius matemàtiques per compondre una peça musical senzilla.

En el primer apartat del treball, ***Introducció matemàtica***, es presenten alguns dels aspectes més rellevants del nombre necessaris per comprendre la resta de continguts del treball. En el segon apartat, ***contextualització històrica***, s'exposa una visió general de la trajectòria del nombre a través de diversos períodes històrics mostrant els diferents usos d'aquest en determinades disciplines artístiques, centrats bàsicament en el terreny musical. En el tercer apartat, ***anàlisi del nombre d'or en la composició musical***, es mostren diversos exemples d'ús del nombre en la creació d'una obra musical. S'exposa l'anàlisi de dues obres del compositor del Barroc J.S.Bach (el *primer moviment de la sonata en sol menor per violí sol* BWV 1001 i el *preludi en re major* BWV 850) creades intencionadament seguint les directrius àuries; i una obra (el *Boig per tu* de Sau) creada involuntàriament d'acord amb els cànons auris que exemplifica una premissa que genera controvèrsia: la tendència natural a utilitzar el nombre per compondre una peça estèticament agradable. Finalment, en l'apartat ***aplicació del nombre d'or en la composició musical,*** emprarem la matemàtica del nombre per elaborar una composició musical.

A causa de l'especificitat del tema i del fet que la majoria de literatura científica relacionada amb aquest està expressada en llengües estrangeres, ha estat necessària la traducció de la informació obtinguda fet que ha dificultat en certa mesura l'elaboració del treball.

Finalment, vull agrair el seguiment del meu treball per part de Judit Boronat, la meva tutora de treball de recerca; de Ekàterina Kàtcheff, professora de música de l'I.E.S. Narcís Oller de Valls, que m'ha revisat la part musical; de Josep Mateu, el meu professor d'harmonia, que m'ha encomanat l'interès pel tema i m'ha ajudat davant les dificultats en l'anàlisi musical; de Montse Olivé, bibliotecària de la URV, que m'ha facilitat molt l'accés a la informació de diferents fons bibliogràfics; i de Pep Sala, al qual agraeixo la resposta als correus que li he enviat.

19 de Gener de 2008

1.INTRODUCCIÓ MATEMÀTICA

1.1.ANÀLISI MATEMÀTICA DEL NOMBRE D'OR

Per definir el nombre d'or ϕ, també anomenat *fi,* hom distingeix dos procediments matemàtics que parteixen de conceptes diferents però que conflueixen en una mateixa expressió numèrica.

Quant al primer, es concep un segment constituït per dos subsegments desiguals *a* i *b*, de manera que la longitud total del segment serà (*a+b)*.

Seguidament, s'estableix la següent proporció entre els dos subsegments: la longitud total del segment (*a+b)* dividida pel subsegment de longitud més gran *a* serà igual a aquest subsegment *a* dividit pel subsegment de longitud més petita *b*. Així establim l'expressió següent:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{(Fig.1.)}$$

Si denominem Φ al quocient $\frac{a}{b}$ [1] obtindrem la següent expressió (fig.2.):

$$\frac{a+b}{a} = \Phi$$

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \Phi$$

$$1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \Phi$$

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \qquad \text{(fig.2.)}$$

[1] Aquest quocient és designat "proporció àuria" i guarda relació directa amb el nombre d'or essent aquest el resultat del quocient de dos nombres que compleixen la proporció expressada en (fig.1.).

A partir d'aquesta podem trobar el valor de Φ:

$$1+\frac{1}{\Phi}=\Phi$$

$$\frac{\Phi+1}{\Phi}=\Phi$$

$$\Phi+1=\Phi^2$$

$$\Phi^2-\Phi-1=0$$

$$\Phi=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

En aquest cas, la solució negativa no té sentit geomètric ja que no podem concebre longituds negatives.

Pel que respecta al segon procediment, hom concep la següent successió numèrica anomenada "successió de fibonacci":

$$A_{(n)}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \text{(Fig.3.)}$$

on n és la posició que ocupa un nombre en la successió

De forma que:

Per n=0 $\rightarrow A_0=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0$

Per n=1 $\rightarrow A_{(1)}=1$

Per n=2 $\rightarrow A_{(2)}=1$

Per n=3 $\rightarrow A_{(3)}=2$

Per n=4 $\rightarrow A_{(4)}=3$

.....

Observem que cadascun dels termes de la successió és el resultat de la suma dels dos anteriors:

$$A_n = A_{(n-1)} + A_{(n-2)}$$

A partir de la successió de fibonacci (fig.3.) hom concep la successió[2] definida per l'expressió següent (fig.4):

$$B_{(n)} = \frac{A_{(n+1)}}{A_{(n)}} \qquad \text{(fig.4.)}$$

De forma que:

Per n=0 $\rightarrow B_{(0)} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(0+1)} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{(0+1)}\right]}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right]} = \dfrac{1}{0}$

Per n=1 $\rightarrow B_{(1)} = \dfrac{1}{1}$

Per n=2 $\rightarrow B_{(2)} = \dfrac{2}{1}$

Per n=3 $\rightarrow B_{(3)} = \dfrac{3}{2}$

Per n=4 $\rightarrow B_{(4)} = \dfrac{5}{3}$

.....

Si s'estableix que:

$$B_{(n)} = \frac{A_{(n+1)}}{A_{(n)}} \qquad\qquad B_{(n-1)} = \frac{A_{(n-1+1)}}{A_{(n-1)}} = \frac{A_{(n)}}{A_{(n-1)}}$$

Hom observa que ambdues successions representen en última instància la mateixa relació entre numerador i denominador: es produeix el quocient entre un nombre de la

[2] Veure apartat A de l'annex on s'exposa la representació gràfica de la successió.

successió de fibonacci i el seu anterior. De forma que, partint d'aquesta premissa, podem concloure que ambdues successions convergiran en el mateix límit, el qual prendrà el valor de Φ.

Així, tindrem que:

$$\lim_{n\to\infty} B_{(n)} = \lim_{n\to\infty} B_{(n-1)} = \Phi \qquad \text{(Fig.5.)}$$

Operant en la successió $B_{(n)}$ deduïm l'expressió (fig.6.):

$$B_{(n)} = \frac{A_{(n+1)}}{A_{(n)}} =$$

$$= \frac{A_{(n)} + A_{(n-1)}}{A_{(n)}} =$$

$$= 1 + \frac{A_{(n-1)}}{A_{(n)}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{A_{(n)}}{A_{(n-1)}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{B_{(n-1)}} \qquad \text{(fig.6.)}$$

Aplicant límits als dos costats de l'igual tenim el següent:

$$\lim_{n\to\infty} B_{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{B_{(n-1)}}\right)$$

Utilitzant les propietats dels límits tenim:

$$\lim_{n\to\infty} B_{(n)} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} B_{(n-1)}}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi}$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Phi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Una altra forma d'expressar el límit podria consistir en, a partir de l'equació $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}} = \ldots\ldots \qquad \text{(fig.7.)}$$

o bé a partir de l'equació $\Phi^2 = \Phi + 1$

si $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$ $\qquad \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots.}}}}$

A partir de l'expressió (fig.7.) observem una propietat característica de Φ: ell i el seu invers tenen la mateixa part decimal:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \qquad \Phi = 1.618 \qquad \frac{1}{\Phi} = 0.618$$

Un cop definit el nombre, veurem algunes de les seves aplicacions geomètriques: la construcció de segments, rectangles, espirals i pentàgons que segueixin la seva proporció.

1.2.ANÀLISI GEOMÈTRICA

La divisió d'un segment seguint la proporció àuria

-Suposem un segment AB de longitud a .

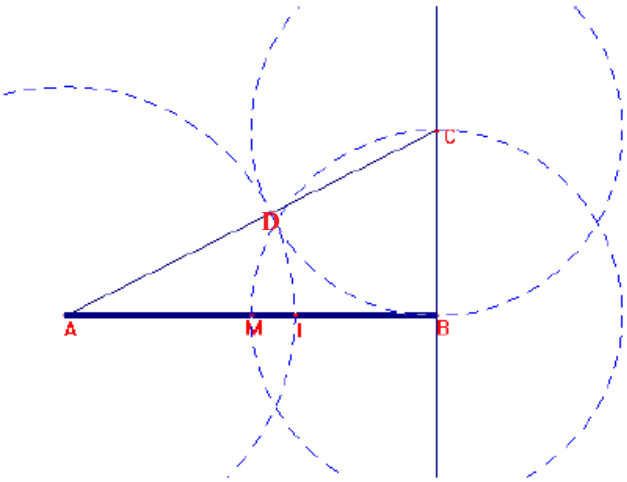
-Tracem una perpendicular al segment AB en el punt B.

-Amb centre a B i radi BM (M és el punt mitjà del segment AB) dibuixem una circumferència que determina el punt C.

-Tracem el segment AC

-Tracem l'arc de circumferència de centre C i radi CB que talla AC en el punt D

-Tracem un arc de circumferència de centre A i radi AD que talla AB en el punt I.



Per analitzar la relació entre el subsegment AI i el subsegment IB seguirem el següent procediment:

Utilitzant el teorema de Pitàgores calculem el valor de la hipotenussa AC:

$$\overline{AC}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$\overline{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

A partir del valor de la hipotenussa calculem el valor del subsegment AI:

$$AI = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2}$$

El valor del subsegment IB resultarà de restar el valor total del segment AB del subsegment AI:

$$IB = a - \left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2} \right)$$

Si dividim el subsegment AI entre el subsegment IB:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{\frac{a\sqrt{5} - a}{2}}{a - \left(\frac{a\sqrt{5} - a}{2} \right)} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2a - a\sqrt{5} + a} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{a\left(3 - \sqrt{5}\right)} = \frac{\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)}{9 - 5} =$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 5 - 3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{2\sqrt{5} + 2}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi$$

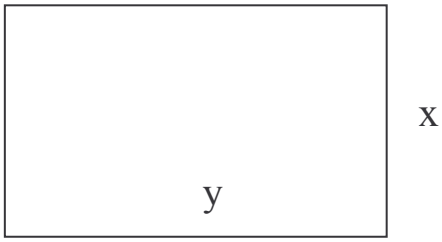
De forma que es compleix que:

$$\frac{AB}{AI} = \frac{AI}{IB} = \Phi$$

La construcció d'un rectangle auri

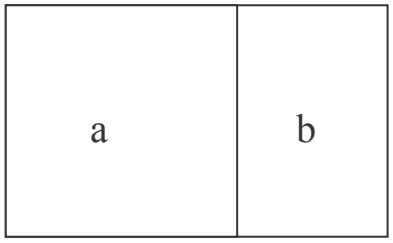
El rectangle auri és el rectangle que compleix que la raó entre la seva base i altura és el nombre d'or.

(fig.1.)



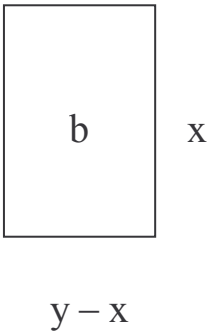
$$\frac{y}{x} = \Phi$$

El rectangle (fig.1.) presenta com a particularitat el fet que si es divideix en un quadrat i un rectangle (fig.2.), aquest darrer (fig.3.) conserva la mateixa relació entre la base i l'altura que tenia el rectangle original:



(fig.2.)

(fig.3.)



Expressem la proporció de la següent manera :

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y-x} \qquad \text{On} \quad \frac{y}{x} = \Phi$$

Si desenvolupem l'expressió tenim que:

$$\Phi = \frac{x}{y-x}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{y-x}{x}$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

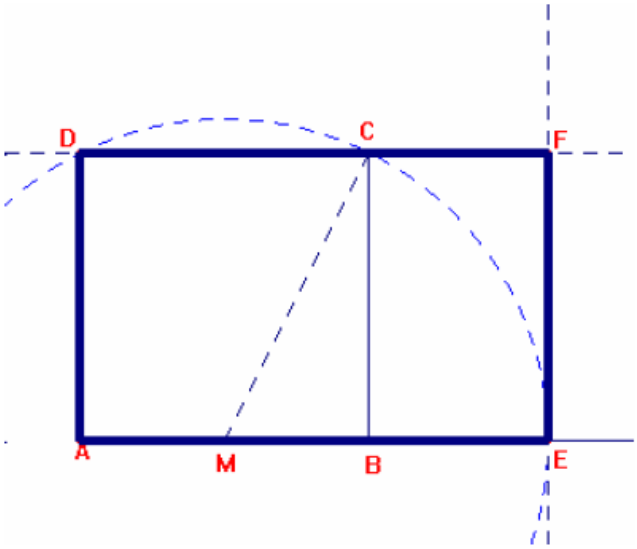
$$\Phi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Per construir un rectangle auri, se segueix el següent procediment:

-Es construeix un quadrat de costats AB, BC, CD i DA de longitud a.

-Tracem l'arc de circumferència amb centre en M (punt mitjà del costat AB) i radi MC a la recta AB, delimitant el punt E.

-Tracem el segment EF perpendicular a AB que talla la recta DC al punt F.



Per comprovar que la raó entre AE i EF és Φ seguirem el següent procediment:

Calculem el valor de la diagonal MC utilitzant el teorema de pitàgores:

$$\mathbf{MC}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

A partir del valor de la diagonal MC calculem el valor de la base AE:

$$AE=\frac{a}{2}+MC=\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a+a\sqrt{5}}{2}=\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

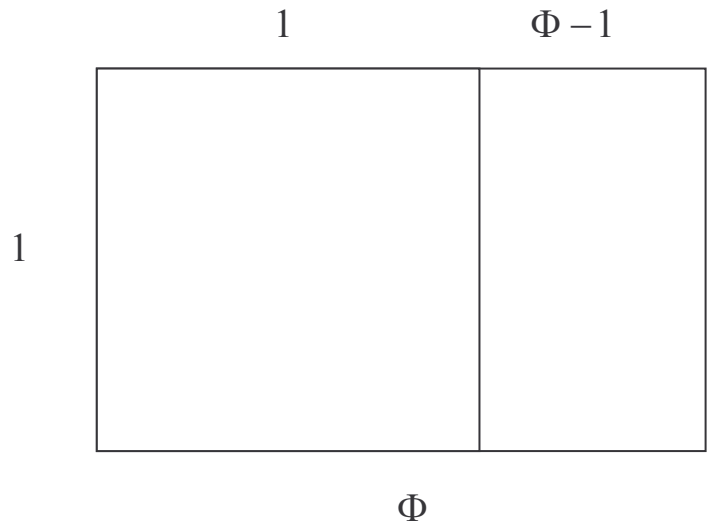
A partir dels valors de la base i l'altura, si calculem la raó entre ambdós tenim que:

$$\frac{\text{base}}{\text{altura}}=\frac{\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}}{a}=\frac{a\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

La construcció de l'espiral àuria

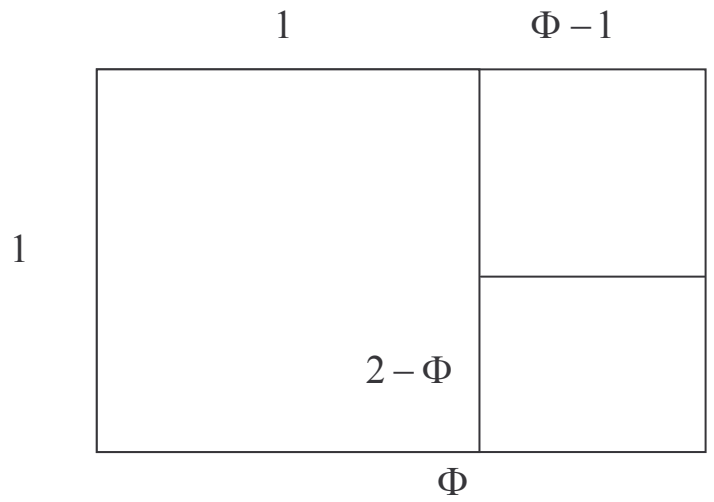
Partint del rectangle auri podem dissenyar l'anomenada "espiral àuria", una de les aplicacions geomètriques del nombre:

En primer lloc dividim un rectangle auri de dimensions $\Phi \times 1$ en un quadrat de costat 1 i un rectangle de dimensions $1 \times (\Phi - 1)$ (fig.4.):



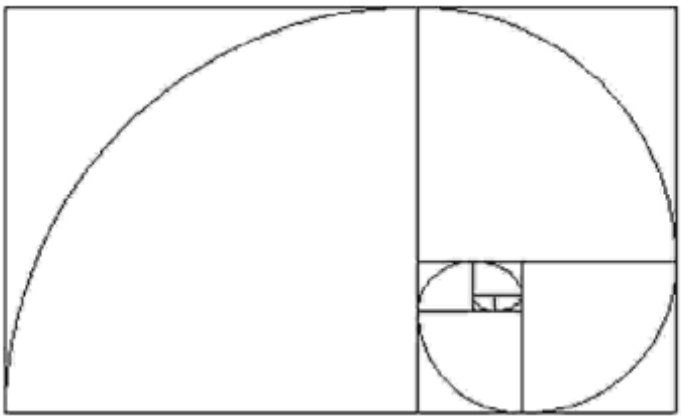
(fig.4)

Seguidament, realitzem la mateixa divisió pel rectangle menor de dimensions $1 \times (\Phi - 1)$, de manera que ens resultarà un quadrat de costat $\Phi - 1$ i un rectangle de dimensions $(\Phi - 1) \times (2 - \Phi)$ (fig.5.)



(fig.5)

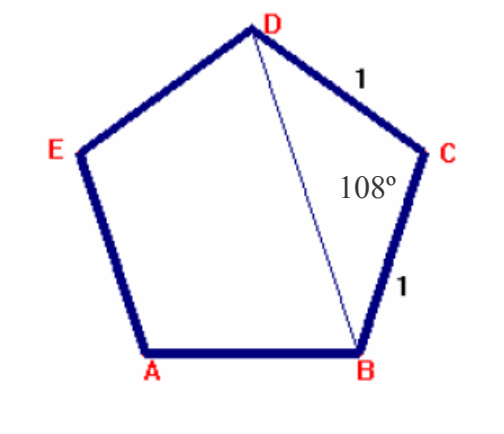
Si repetim aquest procediment successivament i tracem els quarts de circumferència corresponents a cadascun dels quadrats successius obtindrem l'espiral àuria (fig.6.):



(fig.6.)

El nombre d'or apareix en molts polígons regulars. En aquest cas ens centrarem en l'anàlisi del pentàgon regular i del pentàgon regular estrellat.

Si establim un pentàgon regular de costat unitari:



Aplicant el teorema del cosinus podem obtenir el valor de la diagonal DB:

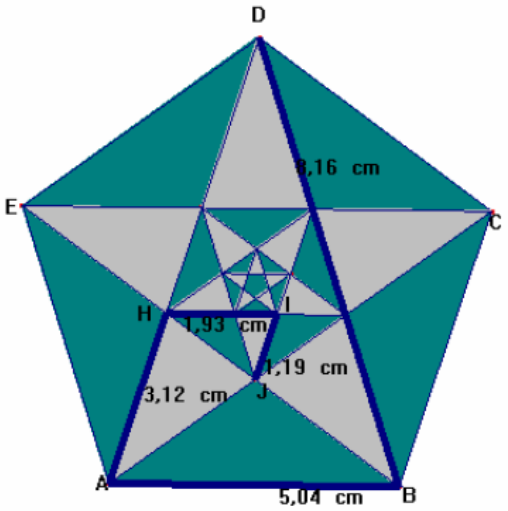
$$\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{DC} \cdot \overline{CB} \cdot \cos 108º$$

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108º$$

$$\overline{BD}^2 = \Phi^2$$

$$\overline{BD} = \Phi$$

Pel que respecta al pentàgon regular estrellat, a partir d'aquest hom pot establir una espiral els segments de la qual guarden relació amb el nombre d'or:



$$\frac{DB}{BA} = \Phi$$

$$\frac{BA}{AH} = \Phi$$

$$\frac{AH}{HI} = \Phi$$

$$\frac{HI}{IJ} = \Phi$$

2.CONTEXTUALITZACIÓ HISTÒRICA

2.1.El nombre d'or a Egipte

La història del nombre d'or comença a la quarta dinastia d'Egipte, uns 2500 anys abans de Crist. Després d'uns quants intents fallits, els arquitectes egipcis construïren dues piràmides que, des de llavors, han estat considerades extraordinàries per molts investigadors. Estem fent referència a la Gran Piràmide de Khufu (anomenada Cheops pels grecs) i la piràmide de Khafre (Chefren), ambdues situades a l'altiplà de Giza.

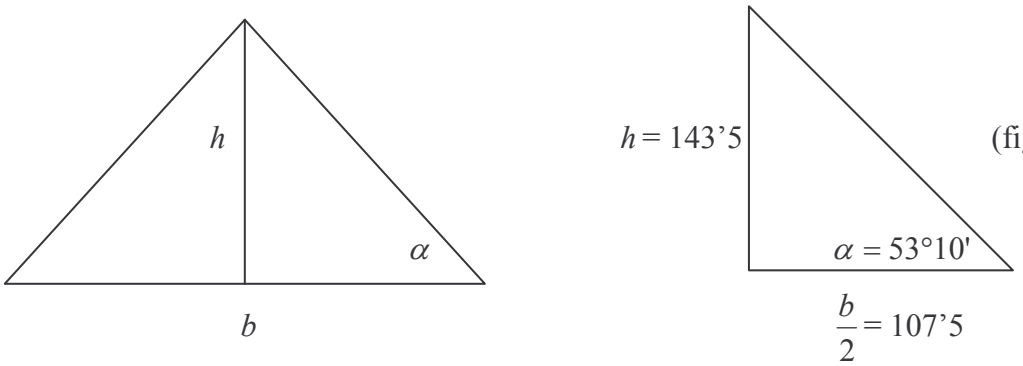
Contemplades com a tombes pels faraons per la majoria d'egiptòlegs ortodoxos, s'han explicitat moltes altres propostes, des de senyals indicant el camí a viatgers o extraterrestres, fins a construccions que representen les dimensions de la Terra.

Malgrat la diversitat d'opinions respecte la seva funció, un aspecte que tothom accepta és la precisió meticulosa amb la que treballaven els arquitectes que les construïren. La Piràmide de Khufu està orientada en direcció nord amb una desviació de només 3'6''. A partir d'aquesta constatació hom es pregunta, partint de la inexistència de sistemes de mesura avançats en l'època, com en pogueren determinar l'orientació amb tanta precisió. A més d'aquest fet, les investigacions han demostrat que les dimensions de la Piràmide contenen el nombre d'or. Amb la utilització d'aritmètica rudimentària i l'ajut de cordes o pals per mesurar sembla improbable haver assolit aquest resultat.

La qüestió de l'orientació, no obstant, no és difícil de resoldre. Els científics han exposat, a partir de l'estudi de les restes d'antics observatoris astronòmics, el fet que moltes civilitzacions tenien mitjans per trobar el nord.

Els investigadors han intentat esbrinar com podrien haver arribat a construir unes estructures tan complexes partint del fet que no tenien un gran coneixement matemàtic. Diverses piràmides foren construïdes seguint les proporcions del triangle 3-4-5. S'han trobat murals i papirs que mostren cordes amb nusos i s'ha demostrat que certs oficials eren coneguts amb el nom de "estiradors de cordes". De manera que s'ha establert una tesi que exposa que un angle recte podia ésser construït doblegant una corda dividida en 12 espais iguals delimitats per 13 nusos: tres espais per un costat del triangle, quatre per l'altre i, finalment, cinc espais per la hipotenusa

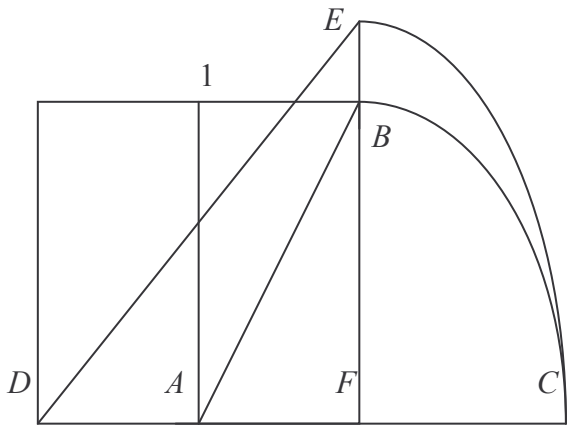
L'alçada (h), la meitat de la base $\left(\frac{b}{2}\right)$ i l'angle d'inclinació (α) de la Piràmide de Khafre han estat mesurats en valors de 143'5, 107'5 metres i $53°10'$ respectivament. La proporció entre les dues primeres mesures- $\frac{143'5}{107'5} = 1'33488$ - és molt propera a $\frac{4}{3}$, tal com verifica la tangent de l'angle (fig.1.):



(fig.1.)

La Piràmide de Khufu ha estat mesurada repetidament des del segle XVIII, cada vegada amb més precisió. Tot i que algunes de les tesis presentades exposen el fet que és pura especulació, diversos científics de gran reputació han mostrat que la relació entre la hipotenusa i la meitat de la base conté la proporció àuria. Partint de la tesi de la majoria dels experts en la història de les matemàtiques sobre el poc coneixement dels egipcis en aquest camp, hom es planteja com podrien haver arribat a obtenir la proporció esmentada anteriorment.

Una de les tesis més ben acceptades dins la comunitat científica descriu el procés de la següent manera: l'arquitecte començaria dividint un quadrat de costat 1 per la meitat amb una línia vertical. Posant un pal a A, allargaria una corda fins a B i dibuixaria un arc al terra de B a C. Movent el pal fins a D, dibuixaria un arc de C fins a E. Això produiria l'anomenat "triangle piramidal DEF" (fig.2.):



(fig.2.)

En notació moderna, s'estableix el següent: el quadrat de costat 1 es divideix en dos rectangles de dimensions $1 \times \frac{1}{2}$. Mitjançant el teorema de Pitàgores podem calcular el valor de la diagonal AB:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Si transferim aquest valor al segment DC mitjançant l'arc BC i li restem el valor corresponent al segment AF $\left(\frac{1}{2}\right)$ obtindrem el valor del segment FC:

$$FC = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

Per obtenir el valor dels segments DE i DC afegim el valor del segment AF$\left(\frac{1}{2}\right)$ a la diagonal AB i tenim:

$$DC = DE = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \Phi$$

Les mesures actuals de la piràmide de Khufu donades en cúbits[3] són: base (440), altura (280) i hipotenusa (356). Les proporcions (arrodonint a tres decimals) són $\frac{280}{220}$=1'273=$\sqrt{\Phi}$ (l'altura dividida per la meitat de la base), i $\frac{356}{220}$=1'618=Φ (la hipotenusa dividida entre la meitat de la base). Aquest és el triangle exposat anteriorment (figura.2.). La proporció es verifica amb l'angle d'inclinació, 51º50'40'', el qual s'allunya tan sols 1' de l'angle que determina el valor de fi (51º49'39'').

[3] El terme cúbit designa les diverses unitats de mesura utilitzades per diferents civilitzacions antigues i constitueix una de les primeres formes de mesura de les quals es té constància. La mesura es basa en la comparació, sovint de cordes, amb la llargada de l'avantbraç. Ha estat utilitzada des de l'antiguetat fins els nostres dies.

Malgrat l'extrema precisió de les mesures de la Piràmide de Khufu, persisteixen encara conflictes entre els investigadors fruit del fet que els egipcis no deixaren documents escrits que constatessin l'ús de fi. Dels pocs documents matemàtics que s'han trobat, el *Papir de Rhind*, que data del 1650 A.C., és el més útil ja que proporciona fórmules per calcular àrees, incloent com calcular la hipotenusa d'un triangle 3-4-5. Tanmateix, el fi no es menciona.

Els nombres, però, proporcionen una prova molt clara de la presència del nombre d'or a la piràmide. Tot i que aquest fet no es pot establir com a prova que els constructors tinguessin consciència de la utilització de fi, si se'n descobrissin d'altres els investigadors es veurien forçats a assumir que, efectivament, l'empraven conscientment.

2.2.El nombre d'or a Grècia

La història de fi es desplaça a Grècia amb el viatge realitzat el s.VI A.C. pel filòsof grec Pitàgores cap a Egipte i Babilònia per estudiar amb els sacerdots i aprendre els seus misteris. Generalment s'assumeix que el coneixement era guardat per les classes sacerdotals i difícilment era compartit. Aquest fet condueix al concepte dels "misteris de l'antiguitat". Aquells als quals s'ensenyaven aquests "coneixements secrets" eren obligats a no revelar-los, sovint sota pena de mort. D'aquests misteris sorgiren tot un seguit de societats secretes.

Després d'estudiar a Egipte i Babilònia durant més de vint anys, Pitàgores va tornar a Grècia i més tard s'establí a Itàlia on fundà una escola de filosofia basada en la numerologia. La base en la qual es fonamentava es resumeix en la premissa: tot són nombres. Tot i que Pitàgores no va deixar cap escrit, Plató en recollí alguns dels coneixements en diversos llibres, alguns dels quals s'han perdut.

Els investigadors encara discuteixen si en algun dels seus diàlegs es parla sobre el nombre d'or i no coneixem amb certesa quins coneixements matemàtics tenien els grecs. De fet, el conegut teorema de Pitàgores es coneixia molt abans del segle XVI A.C. Probablement, el filòsof el va aprendre dels Babilonis.

Un fet destacable és que l'estudi del pentàgon regular era molt important pels Pitagòrics, els quals l'utilitzaven com a element identificador. Aquesta figura geomètrica conté la proporció àuria[4].

[4] Veure apartat 1.2 del treball on s'analitzen les proporcions que conté el pentàgon regular.

Hi ha diversitat d'opinions respecte la utilització del nombre per part dels escultors i arquitectes grecs durant l'època daurada, compresa entre el 600 i el 300 abans de Crist.
El professor de la universitat de Yale, Jay Hambidge, exposa que les obres foren construïdes seguint les directrius de la proporció. No obstant això, el sistema d'anàlisi que utilitza és tan complex que en alguns casos sembla forçat concloure la presència de fi. S'afirma que emprant el seu sistema es podria demostrar l'aparició de qualsevol proporció.
Altres científics mesuraren les proporcions de diversos atuells de ceràmica i arribaren a la conclusió que contenien fi. Tanmateix, foren criticats pel fet que mesuraven fotografies i il·lustracions d'aquests, fet que condueix a resultats erronis en molts casos si no s'examinen acuradament.
El mateix succeeix amb el Partenó d'Atenes. Per una banda, hi ha científics que sostenen l'aparició del nombre d'or en el temple, ja sigui establint que les dimensions de la façana equivalen a les d'un rectangle auri, o bé declarant que la relació entre certes parts segueix les directrius de la proporció àuria. Per altra banda, hi ha investigadors que neguen l'existència de fi en el Partenó.
Alguns dels problemes que sorgeixen a l'hora d'analitzar les dimensions del temple són el seu mal estat i l'ús d'il·lustracions i fotografies preses des d'angles que distorsionen la imatge.
El primer debat inequívoc respecte fi es troba en el compendi matemàtic d'Euclides titulat *Elements*, escrit el segle III abans de Crist, el qual dóna una clara definició de la proporció àuria. Euclides l'anomena "extrema i mitjana raó" i la defineix de la següent forma: una línia recta es divideix en extrema i mitjana raó de forma que la línia sencera és al subsegment més gran com aquest és al subsegment més petit. La relació entre ambdós és la proporcó àuria, la qual determina el valor del nombre d'or.

2.3.El nombre d'or a Europa

Quan els romans conqueriren Grècia i Egipte, el nombre d'or es va començar a desplaçar cap a Occident.
Segons els experts, els constructors medievals no utilitzaven ni el fi ni proporcions entre enters petits. El famós llibre escrit per l'arquitecte romà Vitruvi reflectia aquest fet i va esdevenir el manual per la majoria de constructors fins al Renaixement.
Durant els segles XI-XIII D.C. les primeres catedrals gòtiques començaven a aparèixer a Europa. Alguns estudis reflecteixen l'aparició de fi en la planta de la majoria d'elles.

Respecte al terreny musical, els experts conclouen que la majoria de *rondeau*x i *virelais* medievals contenen la proporció àuria. Per altra banda, exposen el fet que només un *kyrie*, titulat *Messe de Notre Dâme*, fou dividit seguint les directrius de la proporció àuria. De moment, la pregunta respecte la utilització de fi per part dels compositors medievals contemporanis roman oberta.

En el Renaixement, iniciat a Itàlia el segle XV, es traduí l'esmentat compendi matemàtic d'Euclides a l'Italià. Paral·lelament, els pintors començaren a buscar el realisme, fet que conduïa al principi matemàtic de la perspectiva. A més, es publicà el llibre de Luca Pacioli's sobre fi*, De Divina Proportione*, possiblement il·lustrat per Leonardo da Vinci, que va ser discutit per molts artistes de l'època. Aquests fets es fusionaren i donaren com a resultat l'aplicació del nombre en diverses obres artístiques. En el marc musical, la majoria de compositors del Renaixement utilitzaren la proporció àuria. Els experts han constatat l'ús de fi en les formes musicals *rondeaux* i *virelais* renaixentistes. Un dels autors més destacats quant a l'ús del nombre d'or és Binchois.

Els experts consideren que en el Barroc, iniciat el segle XVIII, en l'àmbit musical hi ha evidències clares que diversos autors empraren la proporció àuria. En són exemples els compositors Monteverdi i Vivaldi. Ara bé, és en les obres del músic més destacat de l'època, Bach, on trobem més exemples de l'ús de la proporció[5].

En el classicisme, els experts no han trobat evidència de l'ús de la proporció àuria per part de compositors com Mozart i Haydn. La raó sembla fonamentar-se en la preponderància de la simetria respecte d'altres formes d'estructuració en les melodies clàssiques.

En el Romanticisme, els experts senyalen el fet que el fi era utilitzat bastant sovint. S'ha trobat la proporció àuria en obres dels compositors Berlioz i Tchaikovsky. Brahms i Schubert utilitzaren, de la mateixa forma que Chopin i Mendelssohn, el fi en la majoria d'obres per a piano. Tanmateix, compositors com Rimsky-Korsakov, Saint-Saëns, Schuman i Wagner no utilitzaren amb freqüència la proporció àuria.

Bastants artistes moderns han utilitzat el fi. En l'àmbit musical, la majoria de compositors no han explicitat el fet que l'empressin de forma intencionada. Tanmateix, la precisió amb què apareix a les obres sembla demostrar-ho. En són exemples Debussy, Bartók, Varèse i Sibelius.

[5] Veure apartats 3.2 i 3.3 on s'analitzen dues de les seves obres (el primer moviment de la *sonata en sol menor per a violí sol* BWV 1001 i el *preludi en re major* BWV 850)

3.ANÀLISI DEL NOMBRE D'OR EN LA COMPOSICIÓ MUSICAL

3.1.SISTEMA D'ANÀLISI

Per poder establir si una composició musical ha estat elaborada seguint les directrius de la proporció àuria, en primer lloc analitzarem l'estructura de l'obra en termes tonals i temàtics. Per fer-ho, és necessari identificar els punts més importants d'aquesta: compassos en els quals té lloc o bé una modulació o bé un canvi de motiu. Els canvis de tonalitat estan delimitats generalment per cadències que actuen de conclusions d'una unitat de compassos i marquen l' inici d'una nova secció.

En el cas que ens ocupa, els punts importants seran els nombres dels compassos on s'esdevé una modulació o un canvi de motiu. En les obres de Bach, un compositor del Barroc (1685-1756), és coherent tenir en compte el nombre de compassos ja que en l'era del Barroc no s'utilitzaven canvis de compàs dins una mateixa obra. Si realitzéssim l'anàlisi en obres d'altres compositors més contemporanis, com per exemple Debussy o Bartók, hauríem de canviar el sistema analític. En nombroses obres d'aquests compositors, es produeixen canvis de compàs que n'alteren les duracions i, com a conseqüència, no és coherent tenir en compte el nombre de compàs. En aquest cas, hauríem de considerar com a important l'instant en què té lloc una modulació o un canvi de motiu.

El següent pas consistirà en analitzar si aquests punts on s'esdevé quelcom important respecte el desenvolupament global de l'obra guarden relació amb la proporció àuria[6].

En aquest punt de l'anàlisi, tindrà especial rellevància la successió de fibonacci, essent el quocient de dos termes consecutius d'aquesta l'expressió que designa la proporció àuria. De forma que, si els nombres dels compassos on tenen lloc els esdeveniments principals o les unitats que delimiten coincideixen amb termes de la successió, podrem concloure que el compositor ha emprat la proporció per compondre l'obra. En aquest anàlisi concebrem uns límits de tolerància i considerarem com a vàlids els quocients a partir del cinquè terme de la successió, això és: $\frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$...., ja que el quocient entre els nombres anteriors a aquest s'allunya excessivament del valor 1.6 (mínima aproximació al nombre d'or). De manera que no considerarem vàlids: $\frac{2}{1}$ i $\frac{3}{2}$.

[6] Generalment, a l'hora d'analitzar una obra musical, s'utilitza amb més freqüència el terme proporció àuria ja que, tal com el seu nom indica, explicita la idea de relació entre parts.

Cal precisar un aspecte que pot conduir a confusions. El fet de recercar els punts importants en l'obra comporta a la vegada la divisió d'aquesta en parts. Si els compassos rellevants fossin el 8 i el 13, aquest fet establiria que, per una banda, els nombres dels compassos coincideixen amb nombres de la successió i, per l'altra, que existeixen dues seccions de 8 compassos (compassos de l'1 al 8) i 5 compassos (compassos del 9 al 13) que expressen el quocient de dos termes consecutius de la successió de fibonacci i que, per tant, guarden relació amb la proporció àuria (fig.1.):

(fig.1.)

$$\frac{8}{5} = \frac{13}{8} = \Phi$$

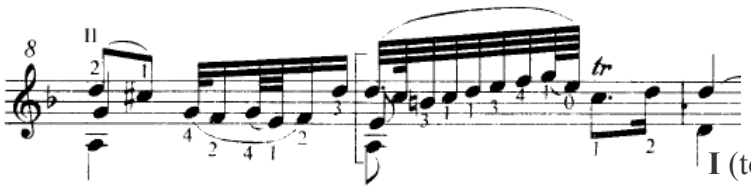
Segons si en un compàs que coincideix amb un del termes de la successió de fibonacci comença o acaba un motiu o una tonalitat haurem d'interpretar-ho de formes diferents: en el primer cas, no podrem concebre dues unitats independents ja que si, seguint l'exemple anterior, en el compàs 8 d'un total de 13 es produís una modulació que s'estengués fins el 13, el nombre de compassos que es trobarien modulats seria de 6 (compassos 8-13 ambdós inclosos). Evidentment, el quocient $\frac{8}{6}$ no determina la proporció àuria. Per tant, en aquest cas, hauríem de concebre que la relació amb la proporció àuria roman en el fet que d'un total de 13 compassos, la modulació es produeix en el vuitè, ja que el quocient entre ambdós sí que determina la proporció àuria.

Només en el segon cas és indiferent la divisió o bé entre compassos o bé entre parts. Si la modulació acaba en el vuitè això significarà: per una banda, que el compàs on es produeix el canvi és el vuitè d'un total de 13; i per l'altra, que la primera part té 8 compassos (1-8) i la segona 5 (9-13). Ambdós quocients $\frac{8}{5}$ i $\frac{13}{8}$ delimiten la proporció àuria.

3.2.ANÀLISI DEL PRIMER MOVIMENT DE LA SONATA EN SOL MENOR DE J.S.BACH PER VIOLÍ SOL (BWV 1001)

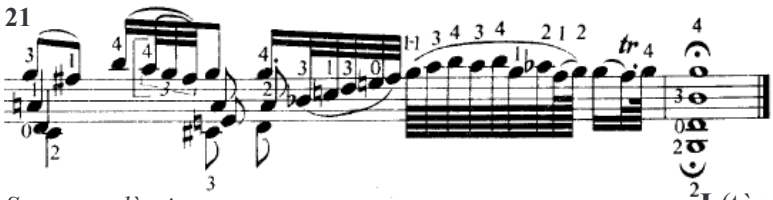
Quant a les sonates per violí sol, escrites generalment en quatre moviments segons l'esquema tradicional de la sonata italiana, els historiadors remarquen que el primer moviment "Adagio" serveix de preludi a la "Fuga" que el segueix, més important pel que respecta a les seves dimensions.

Un anàlisi tradicional de les tonalitats i les cadències condueix ràpidament al reconeixement d'una construcció bipartida, les dues parts de la qual acaben en cadències perfectes: la primera en re menor (compassos 8-9) i la segona en sol menor (compassos 21-22). La similitud d'aquestes dues cadències perfectes amb trino i anticipació de la tònica final confirma la seva importància estructural com a conclusions d'una primera secció modulant a la dominant i d'una altra que recondueix a la tonalitat principal.



I (tònica de re m)

Primera cadència



Segona cadència **I** (tònica de sol m)

Observem que la segona part, més llarga que la primera, acaba mitjançant el recordatori dels elements de la primera. Aquesta relació estableix en la disposició tonal de la peça una simetria de dos grups de 8 compassos cadascun:

-Els compassos de l'1 al 8, que modulen de sol m a re m.

-Els compassos del 14 al 22 que, partint del to de la subdominant, modulen de do m al to principal (sol m).

El paral·lelisme és total entre les dues seccions pel que respecta a les funcions harmòniques (els graus fonamentals del començament de cada secció són idèntics en ambdues)[7]. Cal esmentar el fet que la tonalitat de do m apareix ja en el compàs 13. Malgrat això, l'efecte melòdic d'articulació produït per l'anticipació de la tònica després del trino (darrera nota del compàs 13) dóna a aquest dibuix un caràcter conclusiu i, com a conseqüència, caracteritza el motiu del compàs 14 com a inicial.

El començament de la segona part (després del compàs 8), més inestable tonalment, desenvolupa estructures molt semblants a les de la primera. Destaca el fet que la progressió de tonalitats es realitza en un sentit d'enfosquiment dins l'ordre de bemolls: re m (1 b), sol m (2 b), do m (3 b), mi b major (3 b), la b major (4 b), mi b m (6 b) i do m (3 b).

A partir de l'anterior observem que la divisió en dues parts, del to principal al de la dominant i d'aquest al principal, és ampliable a 3 parts simètricament exactes.

Si considerem els dos primers compassos com una introducció trobem un equilibri perfecte entre les 3 seccions[8]: cadascuna de les tres parts consta de sis compassos i mig.

1.....	3.....8	9.....15	15-16.....21+1
Int.	1a secció	2a secció	3a secció
	A	desenvolupament	A'

L'anàlisi dels motius i les tonalitats, que en un principi és satisfactori per la seva lògica, mostra fortes limitacions ja que no explica la sorprenent cadència del compàs 13, amb el corresponent calderó que l'emfatitza.

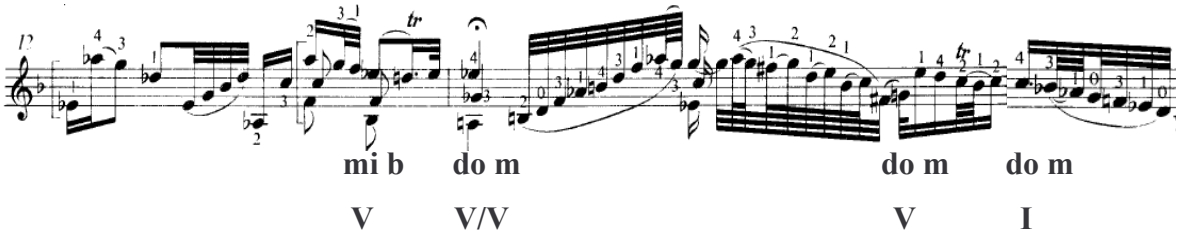
És precisament el calderó el que atreu l'atenció. Aquest punt confirma el clímax expressiu de l'obra com a culminació del procés d'augment de la tensió per acumulació de modulacions que, més endavant, retornen a la tonalitat original. Cal precisar que el calderó és original[9], és a dir, no ha estat afegit per l'editor. De forma que aquest fet explicita que el compositor volia remarcar especialment el punt al qual estem fent referència.

[7] Veure apartat B de l'annex on es mostra un esquema del paral·lelisme establert entre aquestes dues seccions.

[8] Veure apartat B de l'annex on es mostren les tres parts.

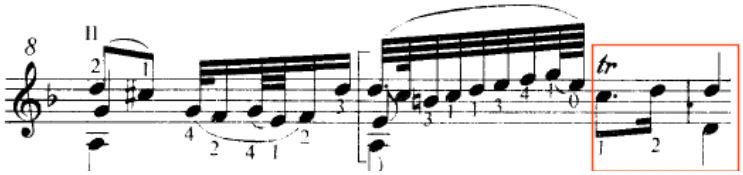
[9] Veure apartat B de l'annex on es mostra l'exemplar de la partitura original escrita per J.S.Bach.

En aquest punt de l'anàlisi ens adonem que cal reconduir-lo fruit del fet que no podem entendre una cadència emfatitzada amb un calderó com un simple "motus animae"[10] sinó que cal concebre'l com un punt important en el conjunt de la peça, un "ratio ordinis"[11]. El compàs 13 té la particularitat d'estar delimitat per dos encadenaments decisius:

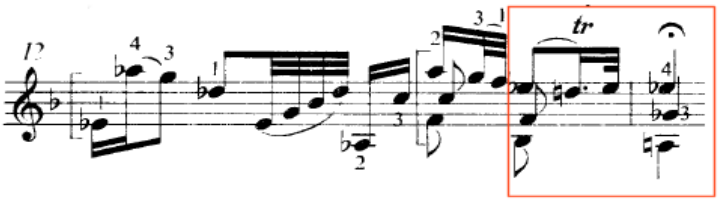


L'acord del calderó fa funció de dominant de la dominant de do menor, tonalitat en què comença la segona part. Bach estableix una enharmonia en tant que canvia el fa # per sol b, de manera que l'acord s'entén de la-do-mi b-sol b a fa#-la-do-mi b, ambdós de sèptima disminuïda. Aquest procediment és habitual a l'hora de realitzar una modulació enharmònica ja que l'acord al qual fèiem referència té la particularitat que si s'enharmonitza qualsevol de les seves notes produeix un nou acord de sèptima disminuïda que sona igual. Per tant, aquest acord representa una modulació per enharmonia: evita la cadència conclusiva a Mi b i, alhora, funciona com a dominant de la dominant de Do m. A més, a part d'actuar com a dominant de la dominant de Do m, esdevé també V/V de Mi b (la-do-mi b-sol b), tonalitat que precedeix el compàs 13.

A partir d'aquest fet podem constatar que les tres cadències del moviment *Adagio* es troben en els compassos 8-9, 13, 21-22, és a dir, en punts estratègics dins l'espai-temps de l'obra definits per la successió de Fibonacci.

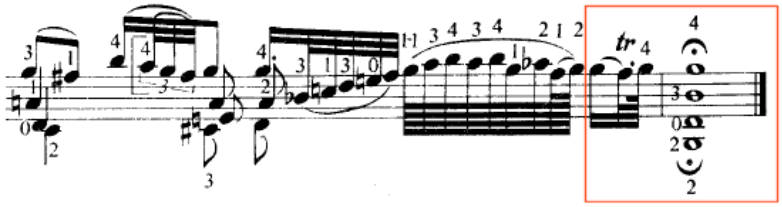


Cadència dels compassos 8-9



Cadència dels compàs 13

[10] Expressió que justifica l'aparició d'un element en la composició basant-se en motius de plaer estètic.
[11] Expressió que justifica l'aparició d'un element en la composició basant-se en valors matemàtics proporcionals.



Cadència dels compassos 21-22

A partir del fet anterior podríem concloure que, efectivament, Bach utilitzà el nombre d'or per elaborar la peça. No obstant, podem encara analitzar més a fons el moviment de les tonalitats principals per observar si també segueixen les directrius de la proporció àuria.

Apreciem que la primera modulació a la dominant es realitza al compàs 5; per contra, el to de la subdominant, do m, que havíem trobat immediatament després del calderó en el compàs 13, és tallat al compàs 18 per retrobar el to principal, sol m. De forma que trobem una simetria total ja que, començant a comptar des del final, el compàs 18 és el cinquè: en el cinquè (des del començament) modula a la dominant de la tonalitat i al cinquè (des del començament) retornem a la fonamental de la tonalitat.

Els moments importants se succeeixen de la següent manera:

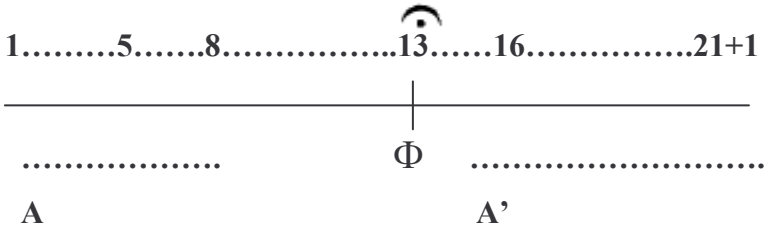
-En el compàs 5: modulació a la dominant, re

-En el compàs 8: preparació de la cadència perfecta a re.

-En el compàs 13: cadència sorprenent cap a la subdominant, do m, en detriment de mib.

-En el compàs 16: secció A', simètrica de A.

-En el compàs 21: preparació de la cadència perfecta a la tonalitat principal més un compàs final.



Al voltant del punt culminant, els 22 compassos del moviment estan dividits en 13+8 compassos +1. A l'interior d'aquestes seccions, el moviment queda subdividit per les tonalitats. De forma que podem confirmar l'ús de la proporció àuria en la primera part *Adagio* de la *Sonata en sol m* de J.S.Bach.

3.3.ANÀLISI DEL PRELUDI EN RE MAJOR DE J.S.BACH (BWV 850) DEL *CALVECÍ BEN TEMPERAT*

Un anàlisi de les modulacions principals[12] condueix a la divisió de l'obra en tot un seguit d'unitats de compassos que es detallen a continuació:

COMPASSOS	Nº DE COMPASSOS DE LA UNITAT	ESDEVENIMENTS
1-3	3	Tonalitat principal (Re M)
4-6	2	Modulació a la tonalitat de la dominant (La M)
6-13	8	Correlació de modulacions que retornen de la dominant a la tonalitat original.
	TOTAL:13	

Taula 1

A partir de les dades de la taula 1 observem una estructura bipartida constituïda per un total de 13 compassos: una primera unitat de 5 que desemboca a la dominant i una segona part de 8 que retornen a la tonalitat original. La divisió d'aquestes dues seccions $\frac{8}{13}$ ens condueix al valor de fi.

COMPASSOS	Nº DE COMPASSOS DE LA UNITAT	ESDEVENIMENTS
14-21	8	Successió de modulacions que condueixen a la tonalitat de Sol M (subdominant de la tonalitat principal).
22-26	5	Restabliment de la tonalitat principal (Re M)
27-35	8+1	Establiment d'un pedal de dominant i augment de la tensió que culmina en el compàs 32. Acord final (compàs 35)
	TOTAL:21	

Taula 2

[12] Veure apartat C de l'annex on es detalla l'anàlisi.

A partir de les dades de la taula observem: en primer lloc, l'existència d'una primera unitat de 13 compassos dividida en dues seccions de 8 i 5 compassos que modulen a la tonalitat de la subdominant i retornen a la tonalitat principal respectivament. Si dividim ambdues parts obtindrem el valor de fi $\left(\frac{8}{5} = \Phi\right)$. En segon lloc, observem una segona unitat de 8 compassos més un últim compàs conclusiu. Si dividim aquesta unitat de 8 compassos entre la unitat de 13 a la qual fèiem referència obtindrem el valor de fi $\left(\frac{13}{8} = \Phi\right)$.

A part de les divisions internes realitzades, podríem encara afegir una altra divisió que englobés el nombre de compassos totals exposat a la taula 1 (13) i el total de la taula 2 (21). Efectivament, la divisió $\frac{21}{13}$ condueix al valor de fi[13].

Com a conclusió establim que Bach utilitzà la proporció àuria en aquesta obra per tal d'organitzar l'emplaçament de les modulacions principals (a la dominant i a la subdominant).

[13] Veure apartat C de l'annex on es mostra un esquema general de l'anàlisi de les seccions.

3.4.ANÀLISI DE L'OBRA *BOIG PER TU* DE "SAU"

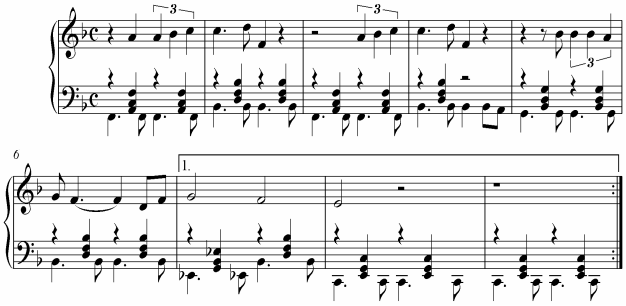
Un aspecte que encara avui en dia genera discussió entre els experts és el fet que alguns investigadors han exposat tesis que tenen l'objectiu de demostrar que existeix una tendència natural a seguir els cànons del nombre d'or. Segons el seu punt de vista, l'home, de forma inconscient, crea les seves obres seguint les directrius del nombre: aquest, en última instància, representa l'essència de la bellesa que emanen.

En aquest apartat del treball, més enllà de fer divagacions sobre la relació entre la bellesa i el nombre d'or, pretenem mostrar l'anàlisi d'una composició musical que conté la proporció àuria i que no ha estat composta, segons les declaracions del mateix autor[14], buscant aquesta relació entre les parts. És a dir, un cas que exemplifica aquesta tendència natural a utilitzar el nombre.

Anàlisi de l'obra

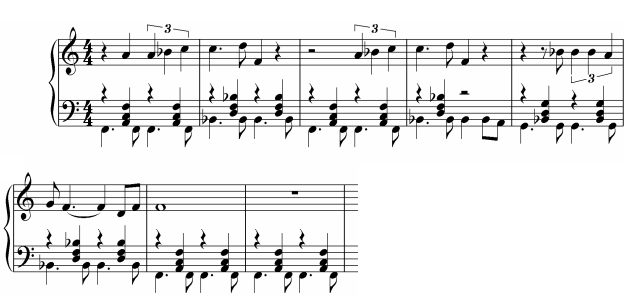
L'obra està estructurada en 5 estrofes[15]. En les quatre primeres, la tornada s'intercala a la segona estrofa i a la quarta. La darrera, la cinquena, representa la repetició de la tornada lleugerament modificada. Per analitzar-la ens centrarem en les dues primeres estrofes ja que la resta de la composició, pel que respecta a l'estructura, és una repetició d'aquestes.

Dins la primera estrofa distingim dues unitats caracteritzades per dues cadències (de la subdominant al setè grau i de la subdominant a la fonamental): la primera, que abraça els compassos 1-9; i la segona, que abraça els compassos 10-17.



IV--VII

Part 1



IV----I

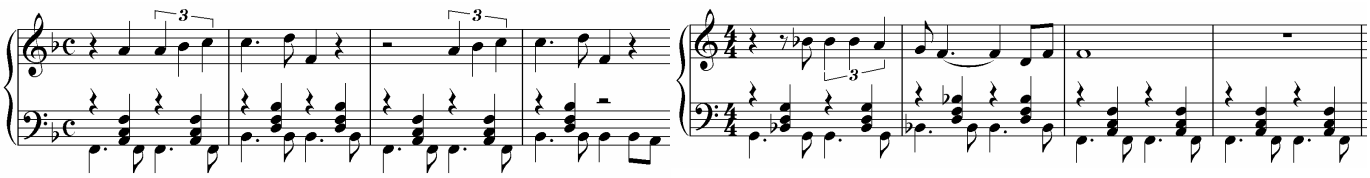
Part 2

[14] Veure l'apartat D de l'annex on es mostra la correspondència amb l'autor explicant el fet que no coneixia la proporció quan composà l'obra.

[15] Veure apartat D de l'annex on es mostra la partitura de *Boig per tu* i la lletra.

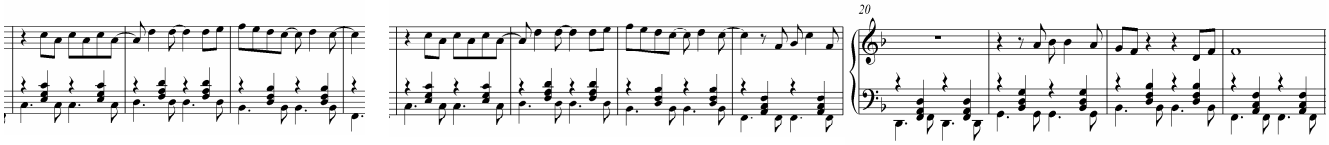
En l'anàlisi ens centrarem en la segona part de la primera estrofa i en la segona estrofa ja que són punts importants pel que respecta a l'estructura global de l'obra en tant que representen l'enllaç entre l'estrofa i la tornada.

La segona part de la primera estrofa està formada per un total de 8 compassos constituïts per dues frases de quatre compassos cadascuna:



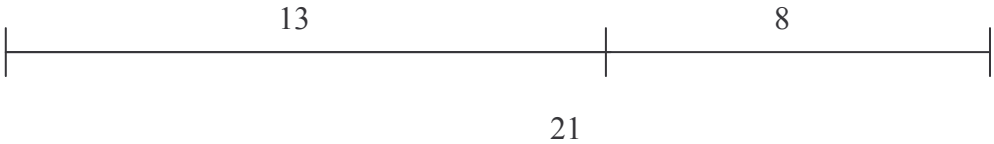
Frase1 *Frase 2*

La segona estrofa, constituïda per un total de 13 compassos, és el resultat de la unió de tres frases de 4 compassos cadascuna i l'addició d'un compàs que actua d'element d'enllaç, en primer lloc amb la repetició de la tornada i, en segon lloc, amb la tercera estrofa.



Frase 1 *Frase 2* *Frase 3*

Si fem un recompte de compassos observem que la segona part de la primera estrofa està constituïda per una sèrie de 8 compassos i la segona estrofa, per una sèrie de 13 compassos. Apreciem clarament que ambdós nombres coincideixen amb termes de la successió de fibonacci i que, per tant, el seu quocient determinarà la proporció àuria $\frac{13}{8} = \Phi$.



El compàs al qual fèiem referència anteriorment és el que determina l'ús de la proporció en l'obra. Teòricament, la composició seria coherent si estigués constituïda, quant a l'enllaç entre la primera estrofa i la tornada, per dues frases de quatre compassos (8 en

total) i per tres frases de quatre compassos (12 en total). Malgrat aquest fet, quan s'interpreta, l'oïda "demana" el compàs perquè l'enllaç amb la resta de parts no resulti forçat[16].

De manera que, de forma intuïtiva, s'incorpora un compàs que comporta com a conseqüència que les parts citades anteriorment guardin relació amb la proporció àuria.

[16] A la pista 4 del CD adjunt hem modificat la cançó i li hem tret el compàs per tal de veure l'efecte que produeix.

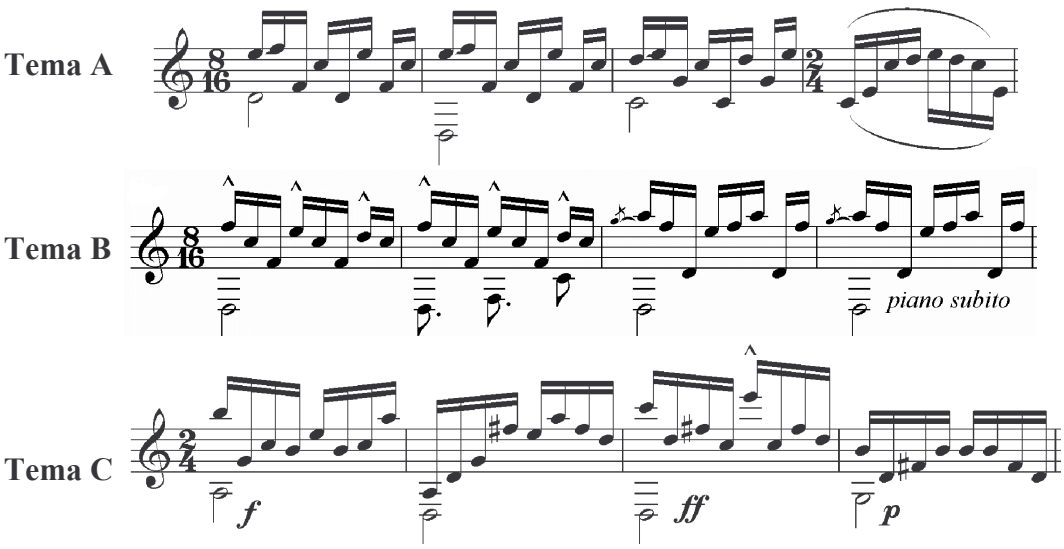
4.APLICACIÓ DEL NOMBRE D'OR EN LA COMPOSICIÓ MUSICAL

4.LA UTILITZACIÓ DEL NOMBRE D'OR EN L'ELABORACIÓ D'UNA COMPOSICIÓ MUSICAL

L'aplicació del nombre d'or en l'elaboració d'una composició musical no és quelcom que es desenvolupa sempre de la mateixa forma, sinó que varia en funció de quina sigui la intenció del compositor. Aquest, per exemple, podria emprar els nombres de la successió de Fibonacci per establir quins han de ser els intervals que han de regir la correlació de notes d'una melodia. Una altra possibilitat podria consistir en distribuir les diverses parts de la peça musical seguint les directrius de la proporció àuria. D'aquesta manera, els compassos en què es produïssin els canvis de tema[17] coincidirien amb nombres de la successió i, com a conseqüència, la relació entre cadascuna de les parts seguiria els cànons auris.

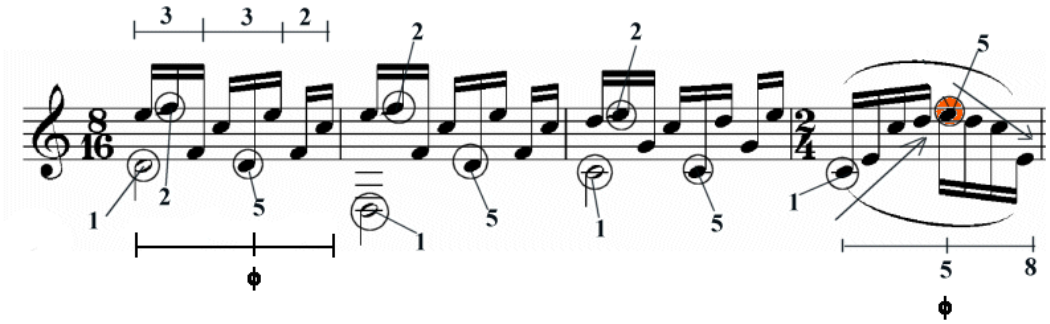
En el nostre cas, l'aplicació del nombre d'or a l'hora de composar una partitura es basarà precisament en això: en la utilització d'aquest com a element estructural. Ara bé, no només aplicarem la proporció globalment, establint uns punts predeterminats en el conjunt de la peça de canvi de tema i punt clímax[18]; sinó que també l'emprarem específicament, de manera que cada tema estarà compost seguint les directrius de la successió. Tot seguit analitzarem aquests aspectes més detalladament.

En primer lloc, hem de decidir el nombre de temes que volem incloure a la composició: en aquest cas, els tres que es presenten a continuació:



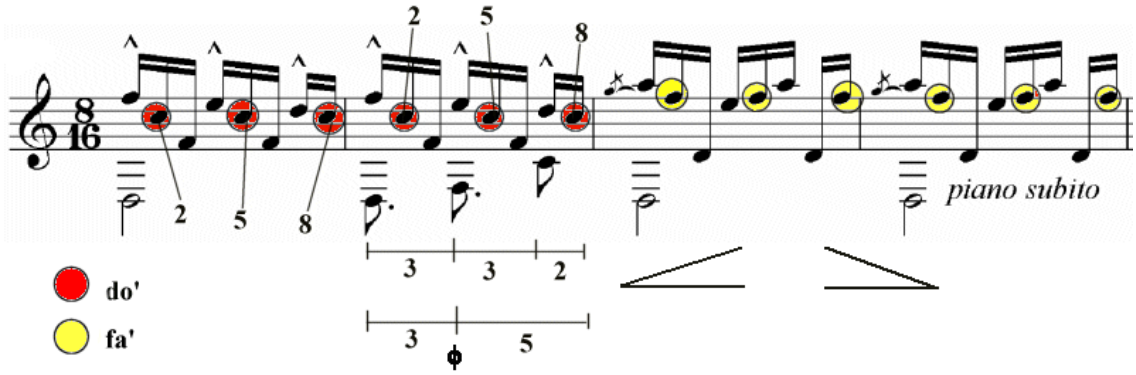
17Tema: agrupació de notes musicals que formen un conjunt distintiu dins la peça musical.
18Punt clímax: punt de la peça musical on desemboca tota la tensió.

Pel que respecta a l'estructura del primer observem que està constituït per tres compassos de vuit notes cadascun, agrupades en grups de tres, tres, i dues (nombres de la successió), i un compàs de vuit notes agrupades en dos grups de quatre. En els tres primers, observem que la repetició de la nota més greu, que pren com a valor un temps de blanca, es produeix en la cinquena de vuit notes totals (punt auri). En el quart compàs, apreciem una correlació ascendent de 5 notes i una posterior correlació descendent de 3. La divisió d'ambdues unitats condueix al valor de fi. Com a curiositat matemàtica, s'estableix que les notes més agudes i més greus de cada compàs coincideixen amb nombres de la successió de Fibonacci.



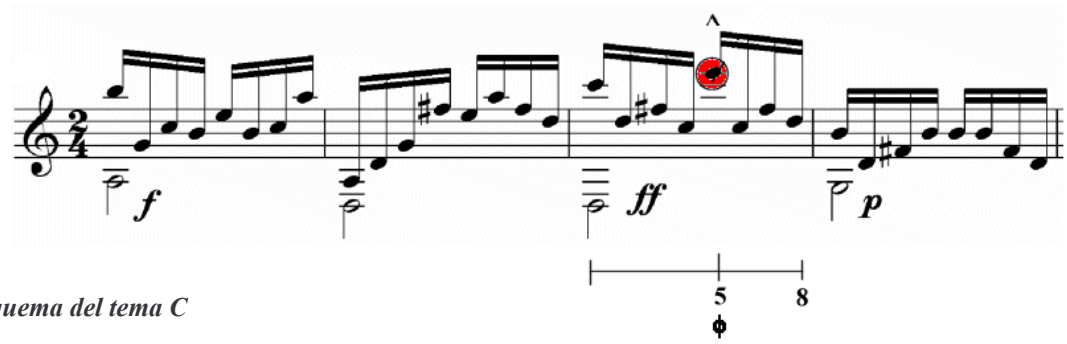
Esquema del tema A

Quant al segon, que presenta una estructura molt similar al primer, està constituït per quatre compassos. Les notes dels dos primers estan agrupades en grups de tres, tres i dues. Les tres primeres tenen una intensitat més destacada que les cinc restants. La divisió d'ambdós grups ens condueix al valor de ϕ. En aquest cas, la particularitat matemàtica recau en l'existència de dues notes mantingudes, el do' i el fa', les aparicions de les quals coincideixen amb nombres de la successió.



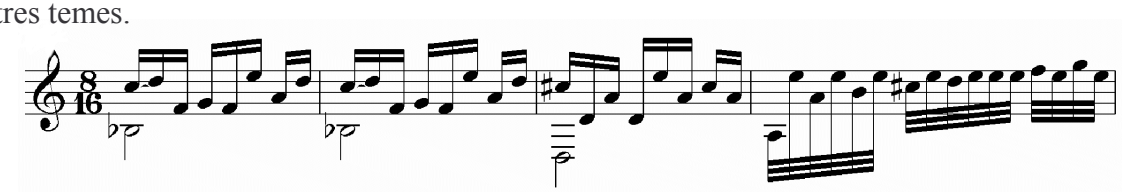
Esquema del tema B

El darrer tema està constituït per cinc compassos les notes dels quals estan agrupades en grups de quatre. En aquest cas no cerquem una agrupació de les notes seguint els nombres de la successió de fibonacci, sinó que l'objectiu al composar aquest fragment és que contingui el punt clímax de la peça musical. Aquest es troba en el tercer compàs, en el qual trobem la nota més aguda que apareixerà en la composició. Es troba situada en la cinquena de vuit notes totals (punt auri).

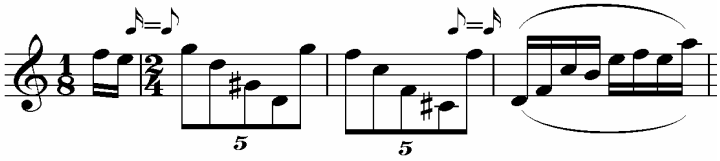


Esquema del tema C

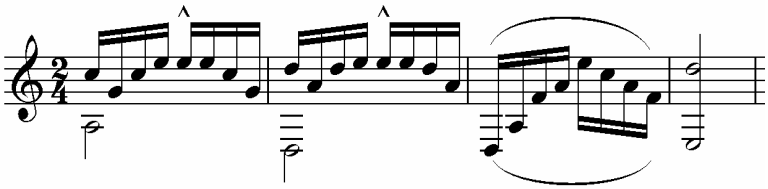
Un cop establerts els tres temes, el següent pas consistirà en unir-los seguint les directrius del la proporció àuria. Arribats en aquest punt, per aconseguir un bon resultat final, cal combinar aspectes matemàtics i aspectes musicals per tal que la composició tingui coherència en ambdós sentits. Si bé el nostre objectiu és elaborar-la aplicant el cànon numèric auri, cal no oblidar els patrons de composició musical bàsics com són l'enllaç de temes mitjançant un pont[19] i la repetició d'aquests per afavorir-ne una millor comprensió per part de l'oient. Així, cal tot seguit establir els passatges d'unió entre els tres temes.



Pont d'unió del tema A amb el B



Pont d'unió del tema B amb el C



Pont d'unió del tema C amb la repetició de l'A (A')

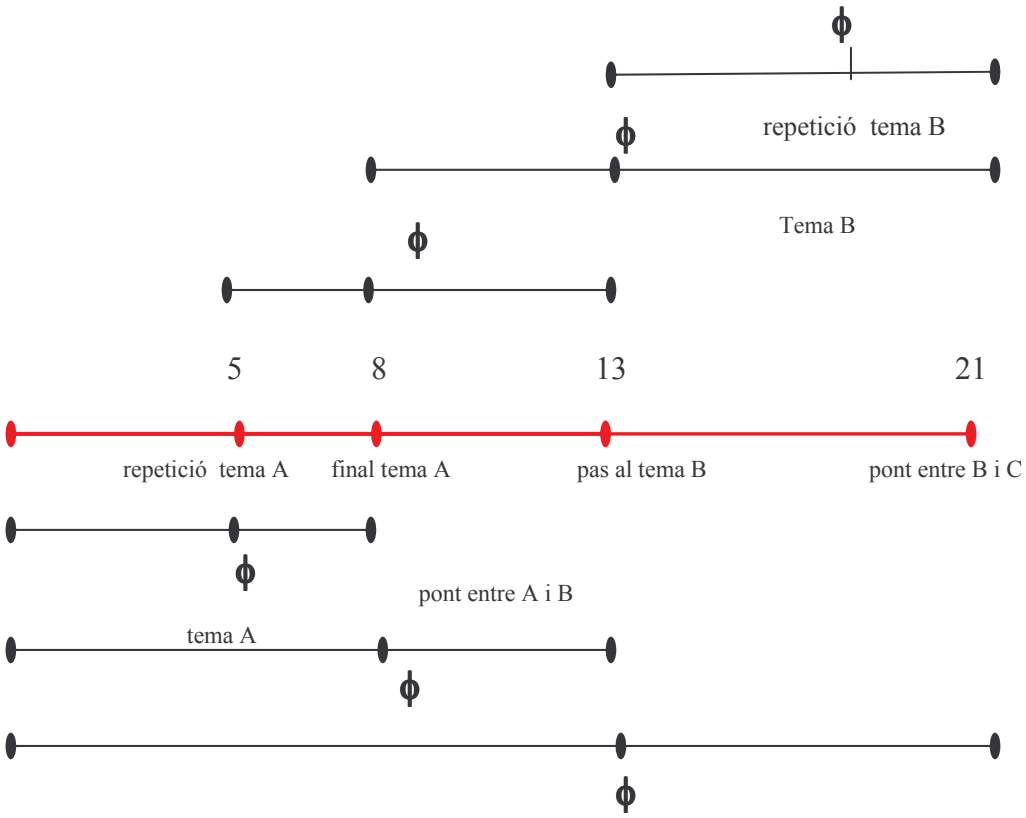
19 Pont: passatge de trancisió que amortigua les diferències entre dos temes i els uneix.

Un cop establerts els temes i els seus respectius elements d'unió només ens resta agrupar el conjunt seguint les directrius de la proporció àuria. Com hem fet anteriorment, elaborant passatges d'unió entre els temes per donar coherència musical a la composició, en aquest punt és necessari també aplicar el fenomen de la repetició per tal d'aconseguir una millor comprensió de l'obra per part de l'oient. De manera que tindrem en primer lloc el tema A que consta de quatre compassos exposat dues vegades, el que conforma un conjunt de vuit compassos en el cinquè dels quals es produirà la repetició (punt auri).

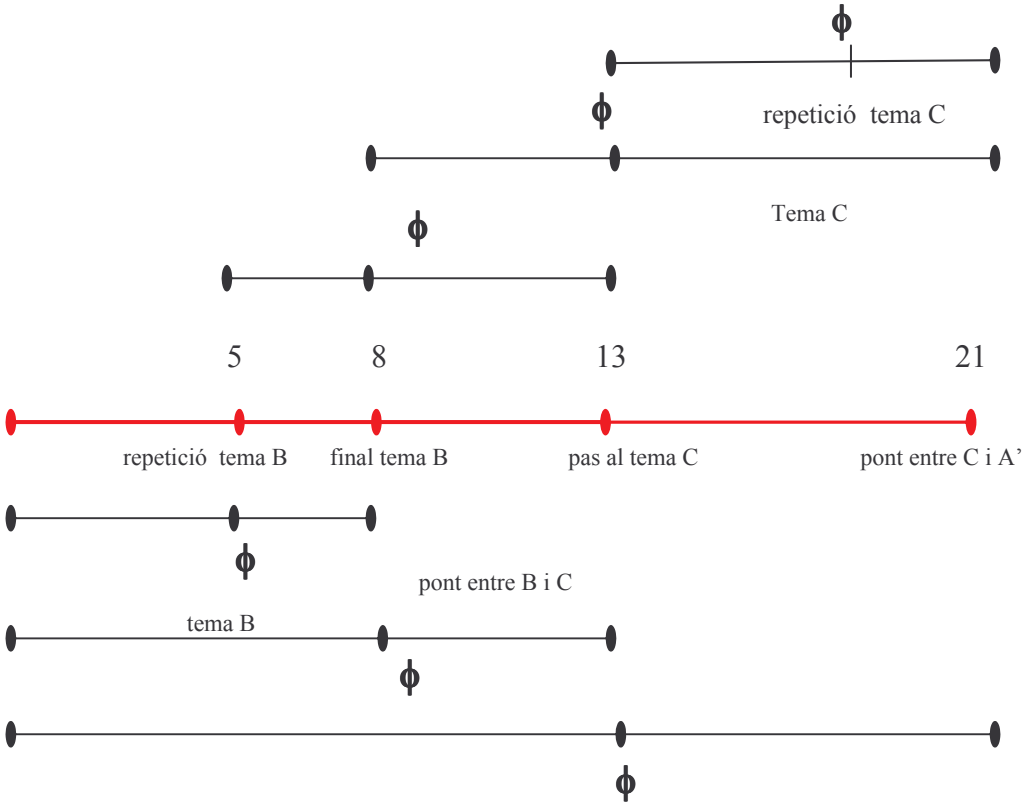
A aquests vuit compassos s'afegirà el pont que ens servirà d'enllaç amb el tema B i tindrem un conjunt de 12 compassos en què en el consecutiu, el tretzè, s'hi produirà l'entrada del tema B (punt auri).

Els 12 compassos inicials aniran seguits dels quatre compassos del tema B el qual, de la mateixa forma que el tema A, repetirem constituint un conjunt de vuit compassos en el cinquè dels quals es produirà la repetició (punt auri). Els dos darrers compassos del tema B són lleugerament modificats quant a les notes en la repetició amb l'objectiu de sorprendre en certa mesura l'oient, fet que no n'afecta l'estructura

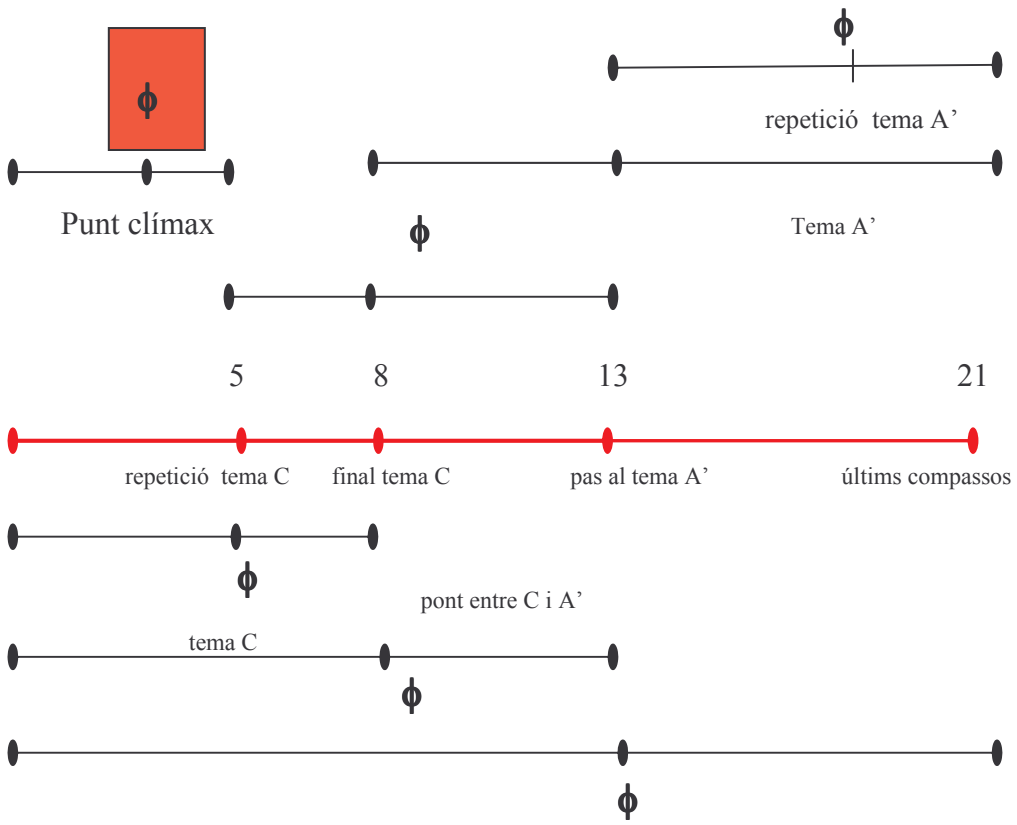
.



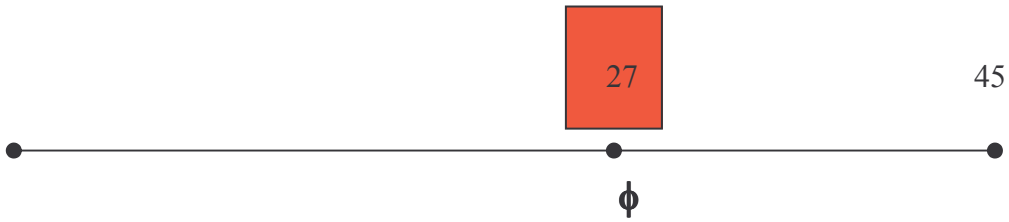
Seguidament, afegirem als 8 compassos del tema B els 4 compassos del pont entre el tema B i el C de manera que tindrem una unitat de 12 compassos. En el següent, el 13, tindrà lloc l'entrada del tema C (punt auri), que consta de 4 compassos. Seguint el mateix procediment que en els dos temes anteriors, els repetirem conformant un conjunt de 8, en el cinquè dels quals tindrà lloc la repetició (punt auri). En aquest punt, afegirem el pont de quatre compassos que hem elaborat per enllaçar el tema C amb el tema A' (la repetició que farem del tema A lleugerament modificat). Ja hem dit anteriorment que les modificacions sempre seran en relació a les notes i no a l'estructura. D'aquesta manera, als 12 compassos formats pel B i el pont entre B i C els sumarem els 8 del tema C, constituint un total de 20 compassos. En el 21, tindrà lloc l'entrada del pont entre C i A' (punt auri).



Finalment, als 12 compassos formats pels 8 del tema C i els 4 del pont entre C i A' afegirem els 4 compassos del tema A' que, com hem fet en els casos anteriors, repetirem de forma que aquesta tindrà lloc al cinquè compàs (punt auri). Així, tenim un grup de 20 compassos en el 21 dels quals tindrà lloc l'entrada dels dos últims compassos de la peça (punt auri).



Un cop finalitzada la peça, que té un total de 45 compassos, observem que el compàs més important d'aquesta, en el qual té lloc el punt clímax, és el 27. De manera que si dividim ambdós nombres obtindrem un valor de 1.6, el nombre d'or. Cal precisar el fet que el resultat del quocient no condueix exactament al nombre d'or. Malgrat això, tal com hem exposat en l'apartat *sistema d'anàlisi*, el límit de tolerància el concebrem en el quocient $\frac{5}{3}$. La divisió $\frac{45}{27}$ és una fracció equivalent a l'anterior.



Un altre aspecte interessant de la peça musical és el fet que si dividim tot el nombre de notes abans de la més aguda (la primera aparició del mi 5) pel nombre de notes que apareixen després d'aquesta (233 i 144 respectivament) obtindrem un valor de 1.618, el nombre d'or.

De forma que la cohesió en l'obra és triple: per una banda, hem elaborat els temes seguint les directrius de la proporció; per l'altra, els hem distribuït mitjançant els cànons d'aquesta establint un punt destacat en la peça, el punt clímax; i, finalment, tal com hem establert anteriorment, hem disposat les notes de forma que globalment guardin relació amb el nombre d'or.[20]

[20] Veure apartat D de l'annex on es mostra la partitura de ***Pluja d'estiu.***

5.CONCLUSIONS

5.CONCLUSIONS

L'estudi realitzat aprofundeix en una de les múltiples possibilitats d'aplicació de les matemàtiques en el terreny musical. El *nombre d'or* és un recurs matemàtic que utilitza el compositor per dissenyar una estructura que li permeti organitzar el discurs musical que ha estat dictat per la seva inspiració. De forma que, tot i mantenir-se fidel als punts que defineixen l'estructura fonamentada en el *nombre d'or*, la seva llibertat creativa no es veu limitada. El fet de sotmetre el discurs musical espontani a uns paràmetres matemàtics concrets dóna a l'obra coherència i ordre. Aquest és precisament l'efecte que he cercat en la meva composició *Pluja d'estiu,* de la mateixa manera que ho han fet al llarg de la història tots els creadors que han utilitzat el *nombre*.

No obstant això, en l'estudi també he descobert la vessant mística o esotèrica del *nombre*. Fruit de la llarga trajectòria del seu ús en diverses disciplines artístiques i de la seva presència a la naturalesa, *l'expressió numèrica àuria* ha estat sovint interpretada com a fórmula matemàtica de la bellesa.

El treball ha gravitat en la vessant objectiva de l'ús del *nombre* com a mitjà estructural, però també he volgut fer referència a la vessant subjectiva d'aquest tot fent esment al punt de vista que defensa l'existència d'una tendència natural a utilitzar *el nombre* per compondre una obra estèticament agradable. El cas de l'obra *Boig per tu* que, segons les declaracions del seu autor Pep Sala, no va ser composada d'acord amb les directrius àuries exemplifica un cas que fonamentaria el punt de vista al qual fèiem referència anteriorment. Ara bé, per obtenir conclusions vàlides caldria analitzar una gran quantitat d'obres i, en qualsevol cas, no eliminaríem la forta càrrega de subjectivitat fruit de la seva relació directa amb termes de bellesa i preferències musicals.

Nogensmenys, més enllà de fer divagacions psicoestètiques, el cas de *Boig per tu* desemboca al mar de la reflexió al voltant de les connotacions estètiques subjectives atribuïbles a les propietats del *nombre d'or* i convida a endinsar-se al món dels vincles entre les matemàtiques i la música.

6.REFERÈNCIES

6.REFERÈNCIES

Revistes:

- *El mundo de las proporciones*. Caracas: 10 (gener 2004).
- *Els cingles de Collsacabra*. Tavertet: 50 (octubre de 2007).
- *Elements*. Puebla: 44 (desembre/Febrer 2002).

Article de revista:

- REDONDO BUITRAGO, Antonia [et al.]. "Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci". *Suma.* [Madrid] 50, (novembre de 2005), pàgs.53-63.

Llibres:

- B.MADDEN, Charles. *Fractals in music: Introductory mathematics for musical análisis.* Salt Lake City: High Art Press, 1999.

- B.MADDEN, Charles. *Fib and Phi in Music: The golden Proportion in Musical Form*. Salt Lake City: High Art Press, 1999.

- HOWAT, Roy. *Debussy in proportion: a Musical Analysis*. London: Cambridge University Press, 1983.

- B.BOYER, Carl. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial, 1999.

- C.GHYKA, Matila. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Editorial Poseidon, 1986.

- CONDAT, Jean-Bernat. *Nombre d'or et musique*. Frankfurt: Peter Lang, 1988.

Document radiofònic:

- "The Golden Ratio". BBC. Canal 4, 13 de marc de 2002

Document televisiu:

- "La proporción áurea". Redes. TVE, 22 de Juny de 2005

Pàgines web:

- Fanney, Tom (2004). *Golden mean talk* [article en línia]. VWC. [Data de consulta: 3 de setembre de 2007]
  <http://facultystaff.vwc.edu/~trfanney/golden-mean-WOWslides/gm11b.html>

- A.Langarita Felipe, Ignacio. *El número de oro*. [article en línia]. [Data de consulta: 10 de setembre de 2007]
  <http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm#2>

- Gutiérrez, Ángel. *La proporción áurea* [article en línia]. [Data de consulta 15 de setembre de 2007]
  <http://www.acta.es/articulos_mf/42077.pdf>

- Beer, Michael. *How do mathematics and music relate to each other?*. [article en línia]. ECCE. [Data de consulta: 29 de setembre de 2007].
  < http://www.pages.drexel.edu/~jjn27/mathandmusic.pdf>

- Weisstein, Eric. *Fibonacci number*. [article en línia]. Wolfam Research. [Data de consulta: 30 de setembre de 2007].
  <http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html>

- Anderson, Matt (1999). *The Fibonacci series*. [Data de consulta: 30 de setembre de 2007]
  < http://library.thinkquest.org/27890/mainIndex.html>

- Stakhov, Oleksiy. *A museum of harmony and the golden section*. [Data de consulta: 15 d'octubre de 2007].
  <http://www.goldenmuseum.com/>

- Devlin, Keith (2004). *Good stories, pity they're not true.* [article en línia]. MAA. [data de consulta: 22 d'octubre de 2007].
  < http://www.maa.org/devlin/devlin_06_04.html>

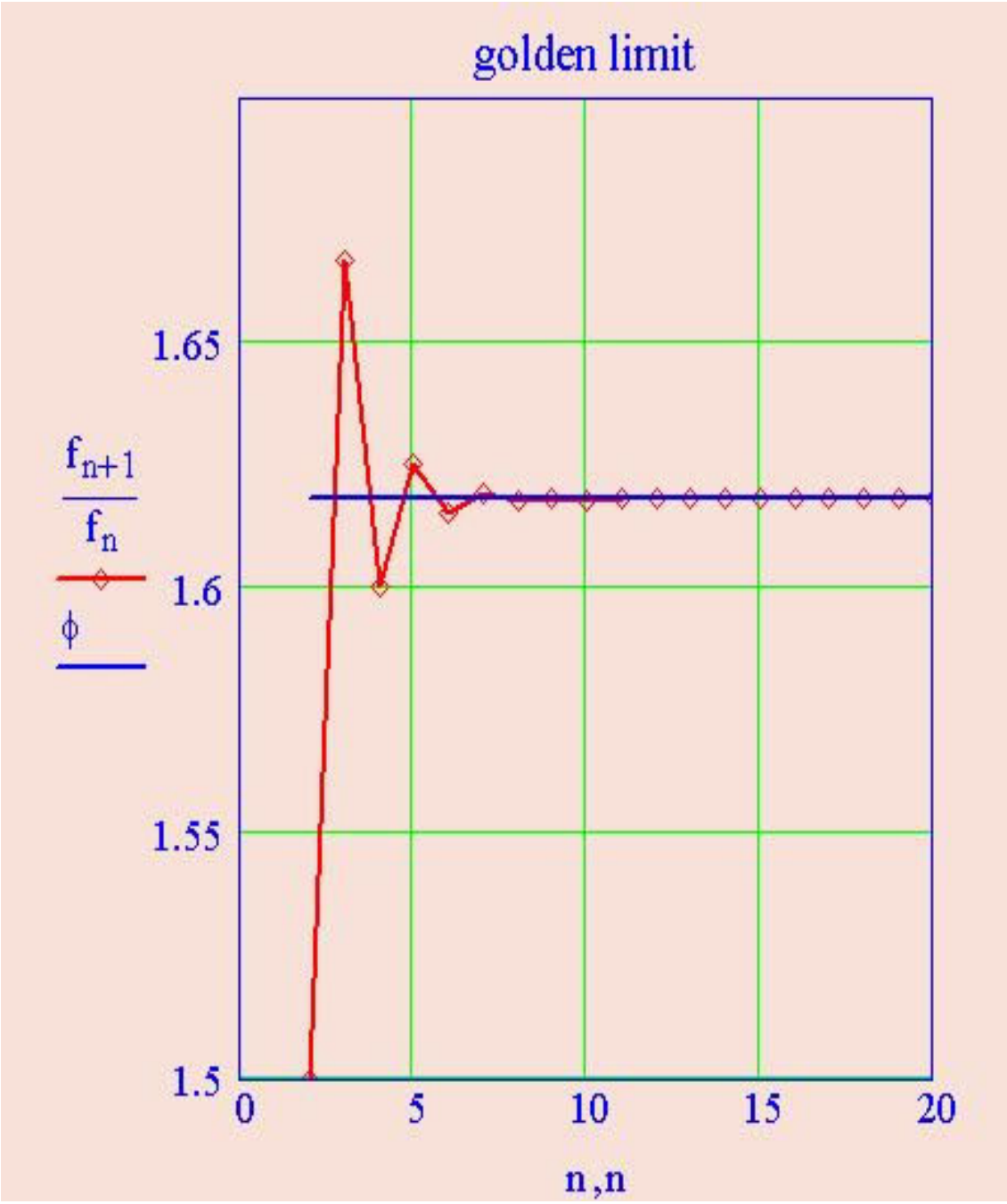
- Kak, Subas (2004). *The golden mean and the physics of aesthetics*. LSU. [article en línia]. [data de consulta: 30 d'octubre de 2007].
  < http://arxiv.org/ftp/physics/papers/0411/0411195.pdf>

- Knott, Ron (1996-2007). *Fibonacci numbers and The Golden Section in Art, Architecture and Music*. [data de consulta: 3 de novembre de 2007].
  <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html>

- Tres alumnes de l'institut Champollion (Grenoble). *Le nombre d'or et la musique.* [data de consulta: 25 de novembre de 2007].
  <http://tpe-musique.chez-alice.fr/index.htm>

ANNEXOS

ANNEX A



La gràfica il·lustra la convergència al nombre d'or de la successió definida a partir del quocient de dos termes consecutius de la successió de Fibonacci.

ANNEX B

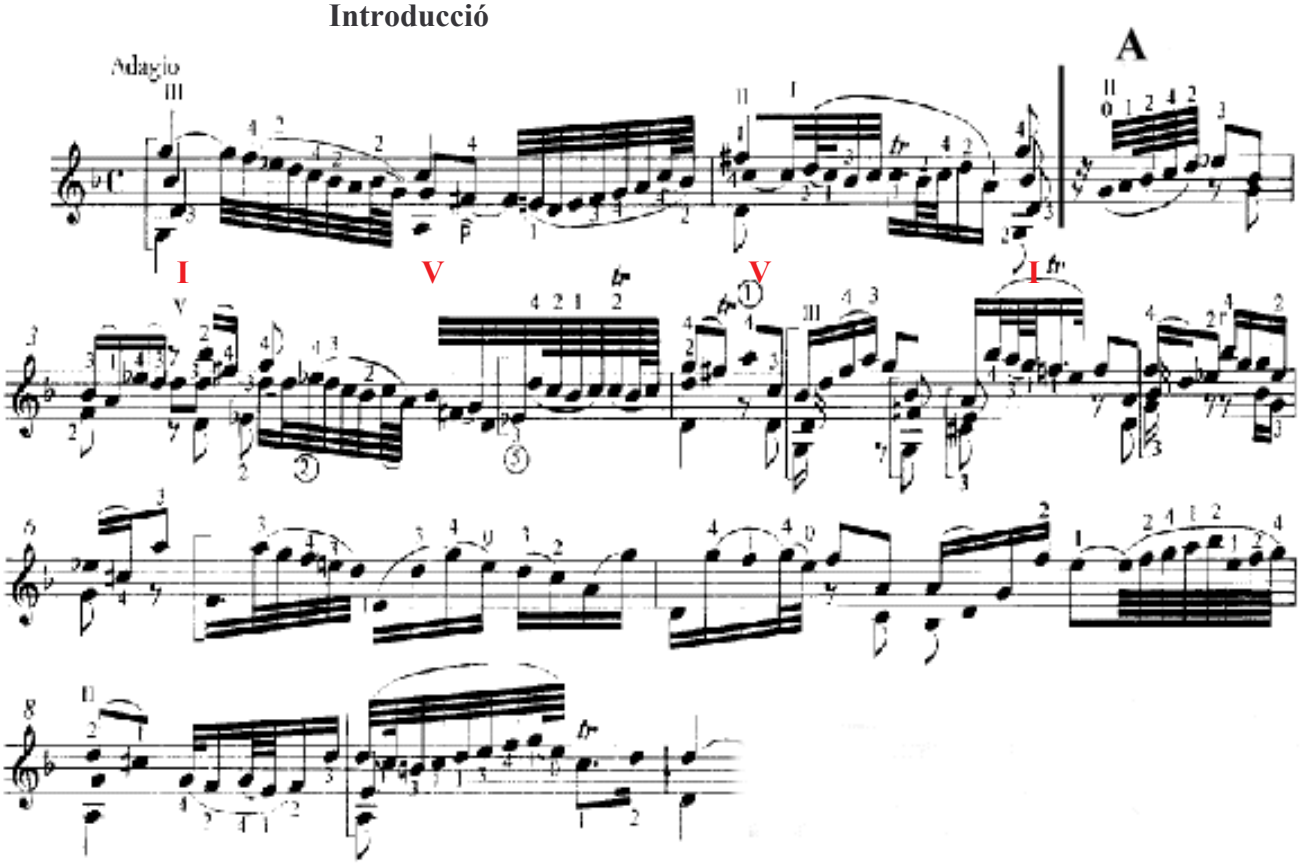
1

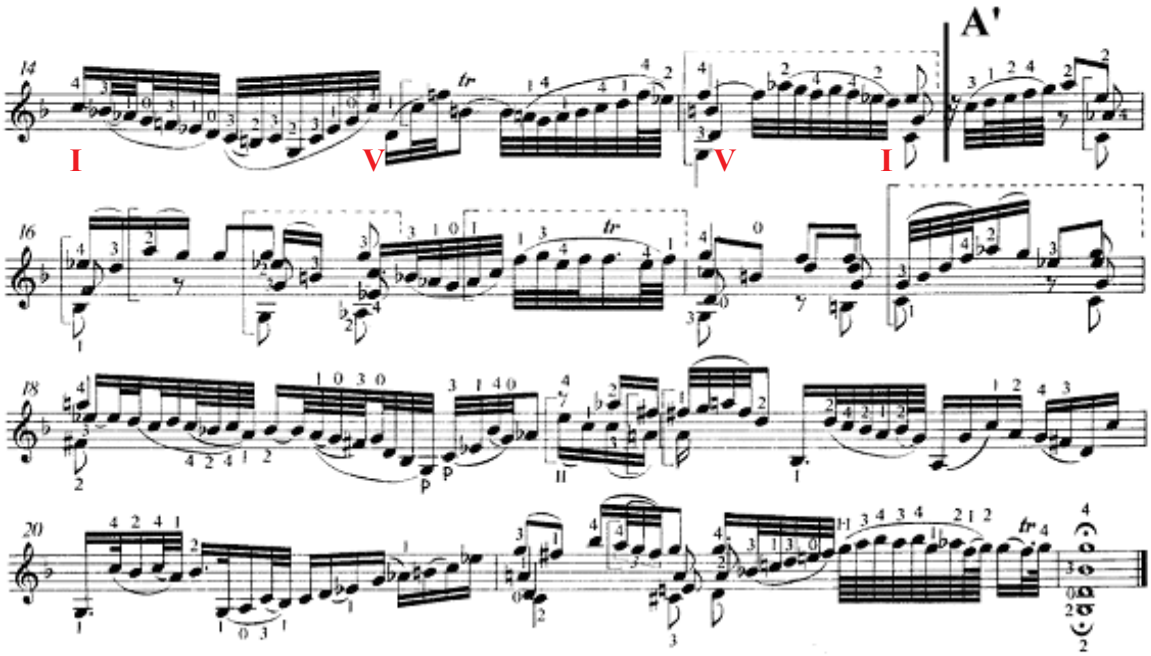
SONATA I

Johann Sebastian Bach
(1685–1750)

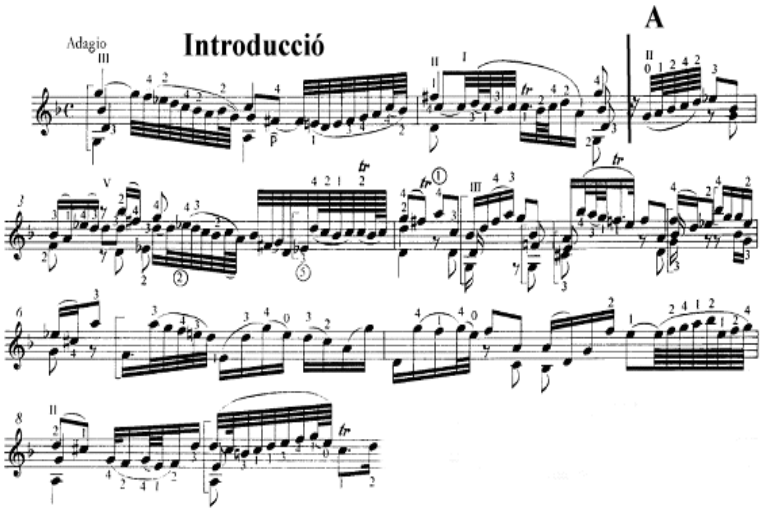
Adagio

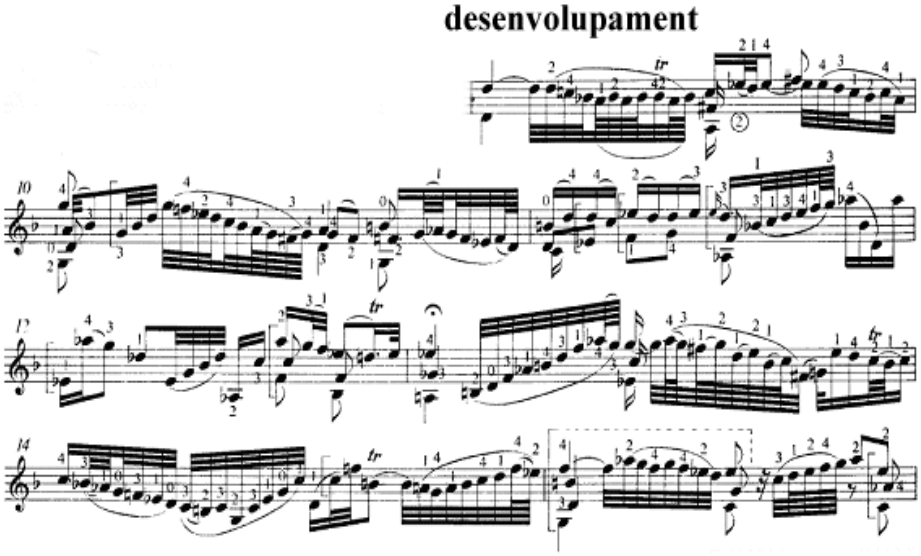
Introducció

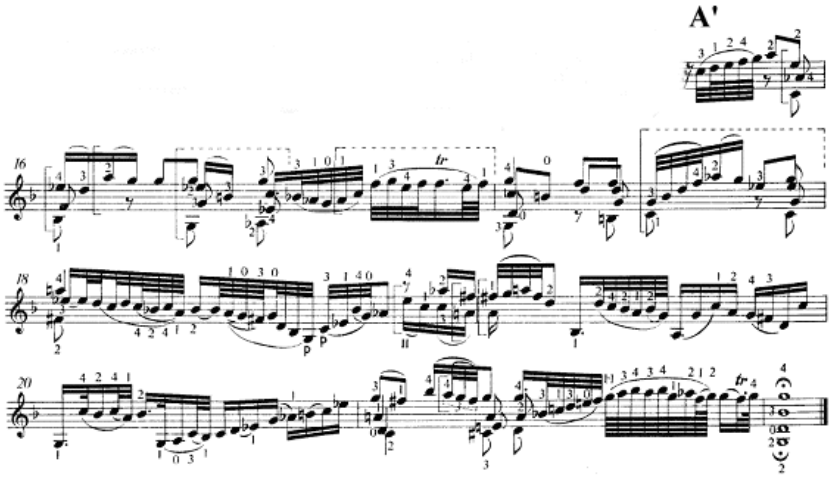




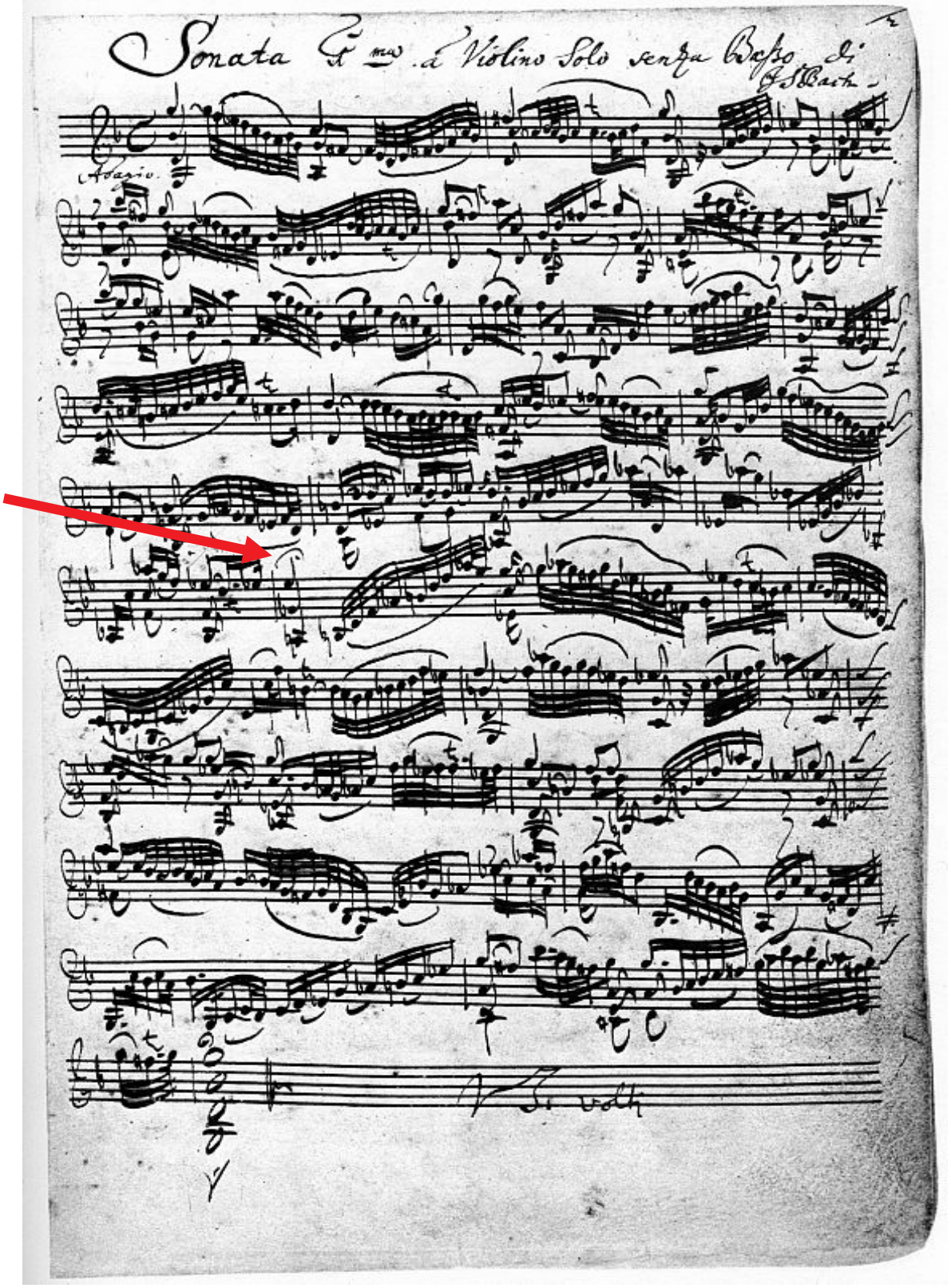
Esquema que mostra el paral·lelisme harmònic i melòdic dels compassos 1-8 i 14-22. Simetria de A al voltant d'una part central.







Esquema que mostra les tres parts de 6 compassos i mig cadascuna.



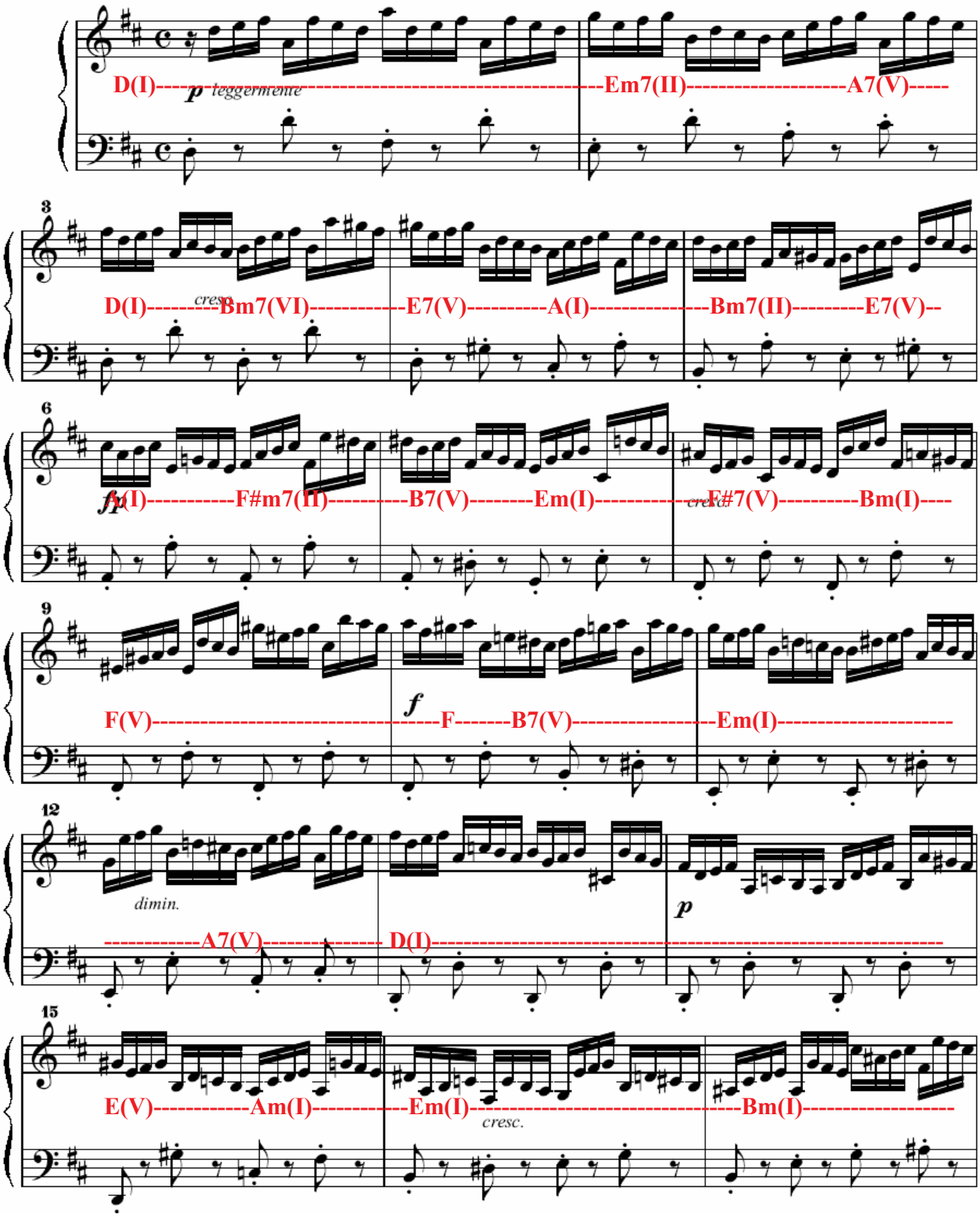
Exemplar de la partitura original de Bach on destaquem el calderó.

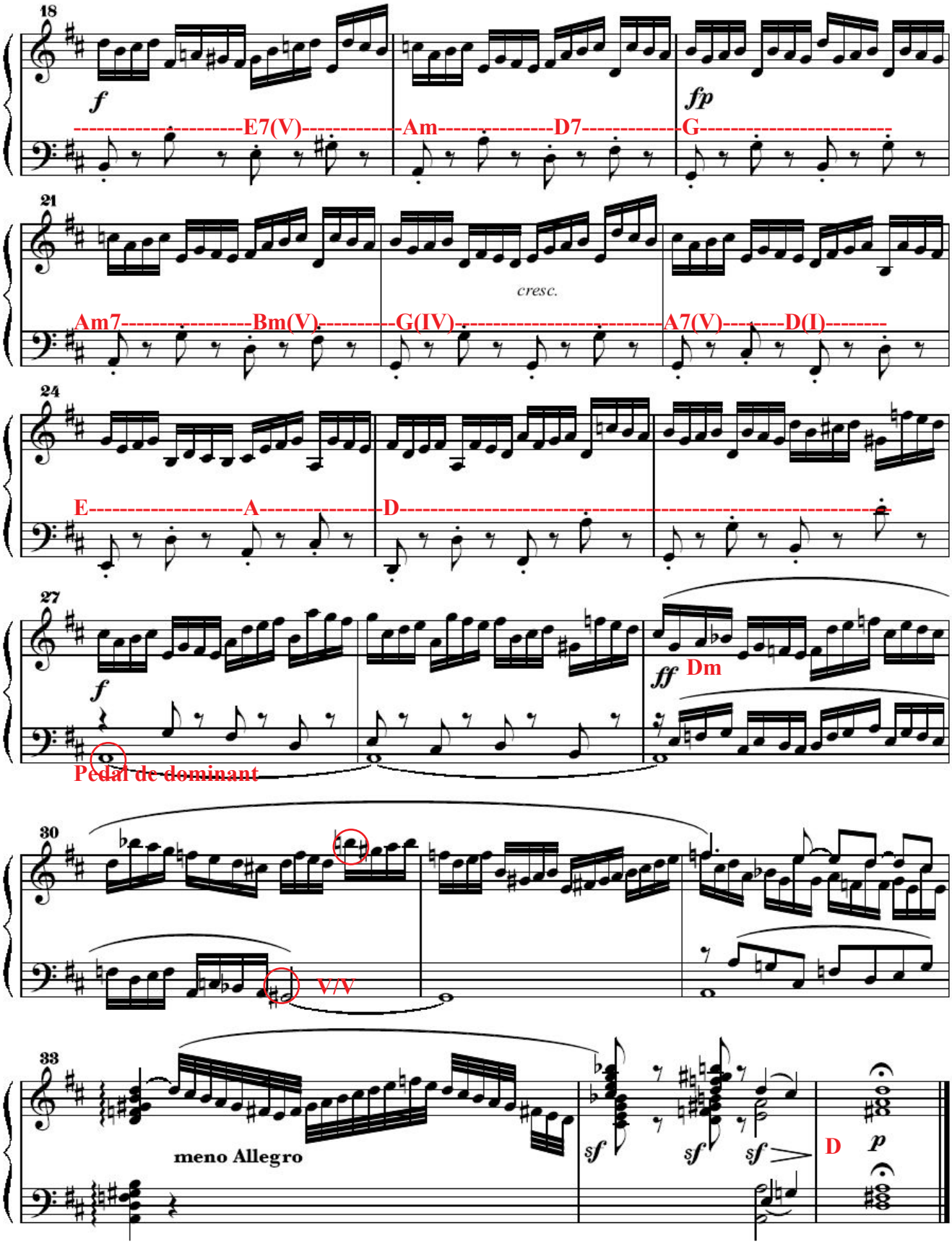
2

ANNEX C

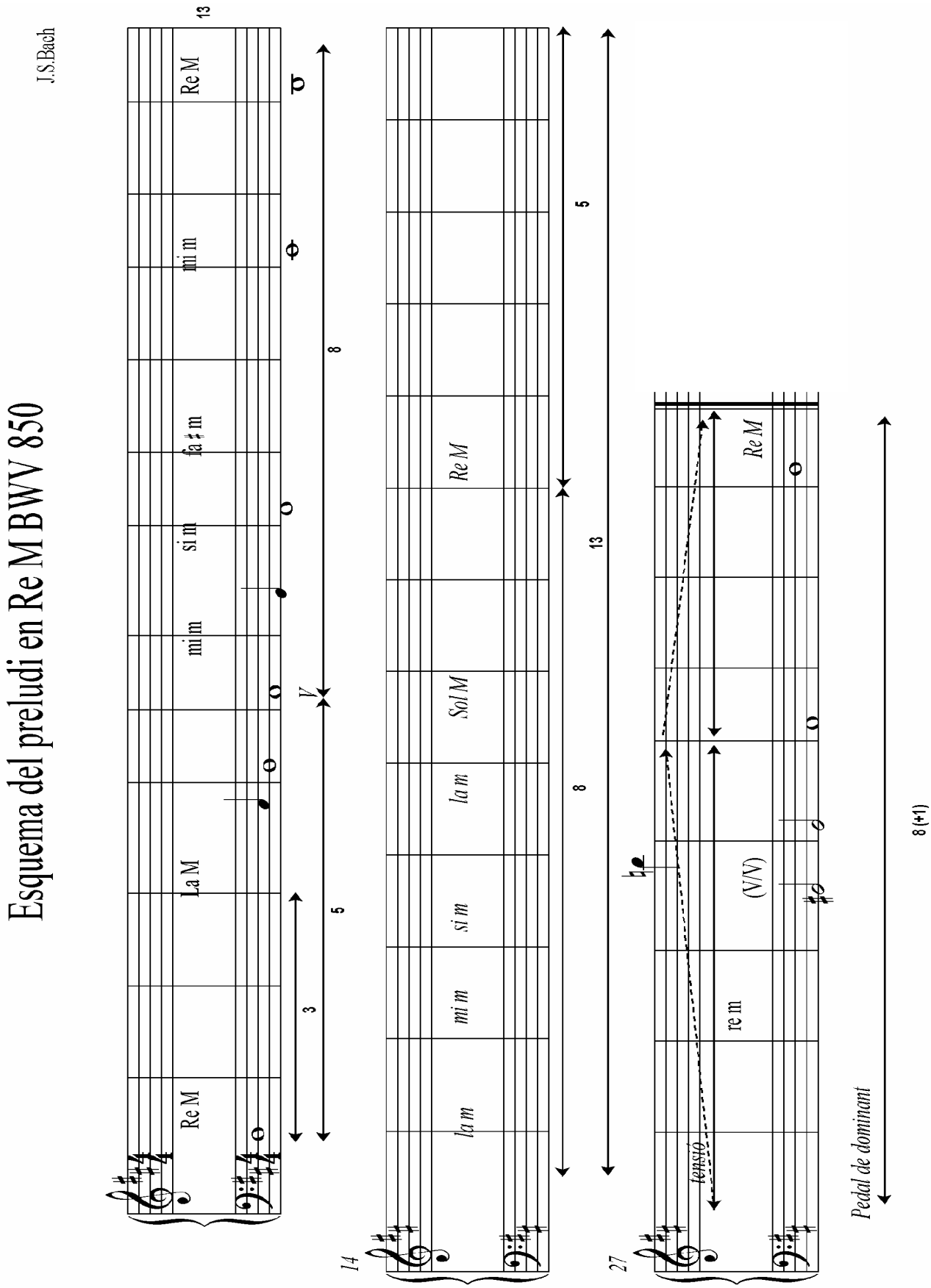
J.S.Bach

Allegro vivace





Esquema que mostra l'anàlisi de les modulacions i tonalitats del preludi.



Esquema global del preludi BWV 850.

ANNEX D

28/12/2007
Apreciat senyor Pep Sala:

Estic realitzant un treball d'investigació sobre la música i les matemàtiques. Estic analitzant l'aparició de la proporció àuria en diverses obres musicals.

Sóc aficionat a la guitarra i conec i interpreto algunes de les seves cançons, entre les quals vaig seleccionar "Boig per tu" per analitzar si contenia la proporció esmentada anteriorment, i efectivament va ser així.

Em permeto la llibertat d'enviar-li aquest correu i, d'aquesta manera, poder incorporar en el meu estudi la seva impressió al respecte. M'agradaria conèixer concretament si, durant el procés de creació de l'obra, va buscar deliberadament estructurar-la seguint les directrius de la proporció àuria.

Moltes gràcies per la seva atenció. Espero poder incorporar en el meu estudi la resposta a aquest correu.

Espero notícies seves. Atentament:

Francesc

28/12/2007
Benvolgut Cesc,

En aquests moments en Pep no està a l'estudi, i no tornarà fins el dia 7 de gener. T'agraïria que a partir d'aquesta data et posessis de nou en contacte amb nosaltres. De tota manera imprimiré el teu mail per tal de comentar-li així que arribi. Estic bastant sorpresa ja que desconec aquesta proporció i si n'ha fet un ús intencionat, per això prefereixo parlar-ne amb ell. Així que sàpiga alguna cosa, t'envio un mail. De cara al gener hi ha molts concerts i anirem una mica de bòlit, motiu pel qual et prego que si no tens resposta, torna'ns a enviar el mail o truca'ns a l'estudi.

Moltes gràcies,

Atentament,

Anna, Indi Music

9/1/2008

Hola Anna:

T'agraeixo el teu correu del proppassat 28/DES. Fent referència al mateix, em poso de nou en contacte amb vosaltres per tal de saber si has pogut fer arribar al Pep la meva qüestió relacionada amb la "proporció àuria".
Resto a la vostra disposició.

Ben cordialment:

Francesc

10/1/2008

Hola de nou,

Tal i com et vaig comentar, he fet arribar a en Pep la teva qüestió referent a la proporció àuria. La veritat és que ha quedat tan sorprès com jo, amb la qual cosa ja et pots imaginar que en el moment de composar el tema " Boig per tu " no va aplicar-hi conscientment l'esmentada proporció, i en cas de complir-se, ha estat fruit de la casualitat. T'agraïm moltíssim l'observació i esperem que per aquest motiu no es vegi afectat el teu treball.

Moltíssimes gràcies de nou,

Anna, Indi Music

En la terra humida escric
Nena estic boig per tu
Em passo els dies esperant la nit
Com et puc estimar
si de mi estàs tan lluny
servil i acabat boig per tu

Se molt bé que des d'aquest bar
jo no puc arribar on ets tu
però dins la meva copa veig
reflexada la teva llum
me la beuré
servil i acabat boig per tu

Quan no hi siguis al matí
les llàgrimes es perdran
entre la pluja que caurà avui
Em quedaré atrapat
ebri d'aquesta llum
Servil i acabat boig per tu

Se molt bé que des d'aquest bar
jo no puc arribar on ets tu
però dins la meva copa veig
reflexada la teva llum
me la beuré
servil i acabat boig per tu

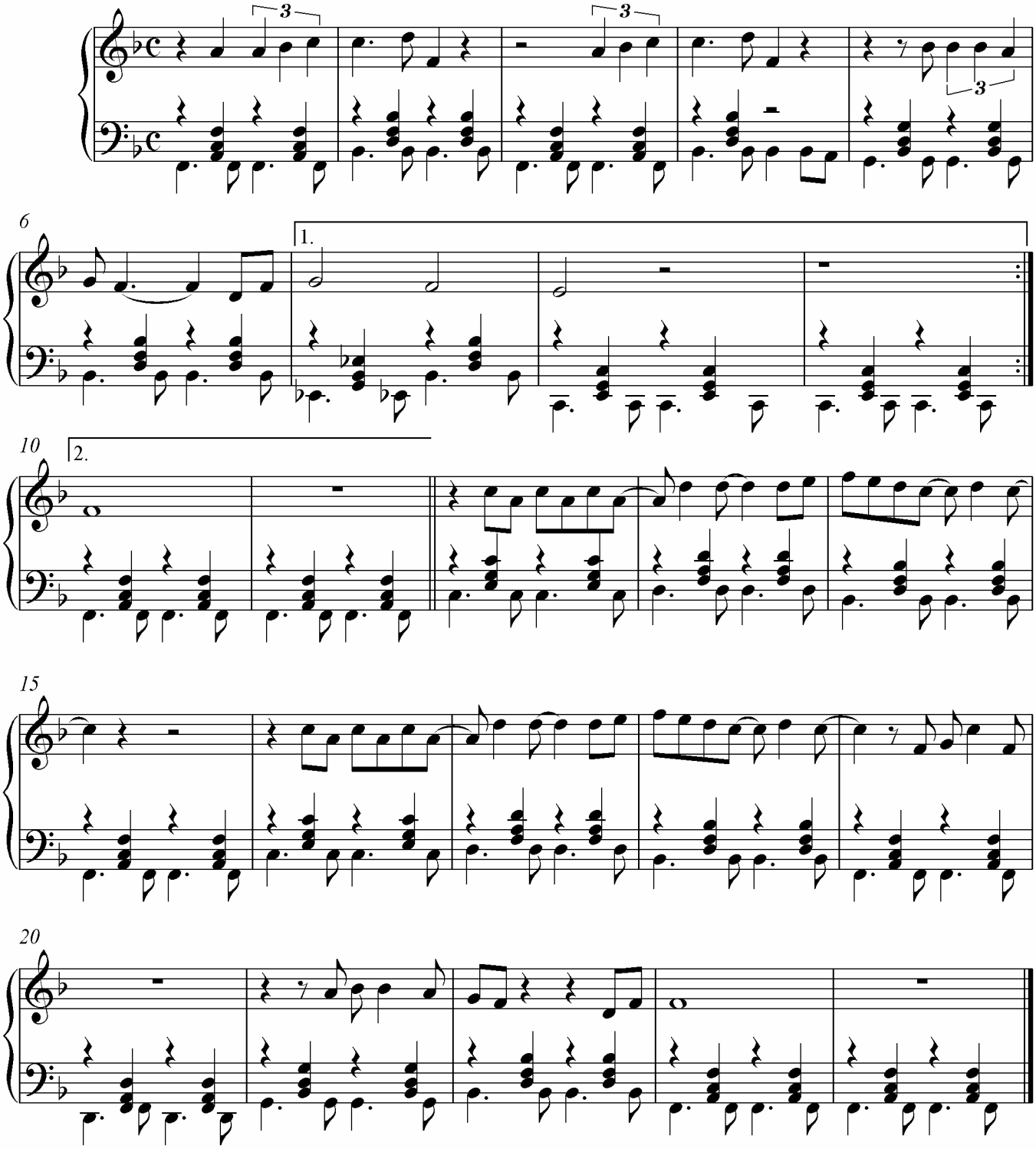
Se molt bé que des d'aquest bar
jo no puc arribar on ets tu
però dins la meva copa veig
reflexada la teva llum
me la beuré
servil i acabat boig per tu
servil i acabat boig per tu

Lletra de Boig per tu

3

BOIG PER TU

Sau



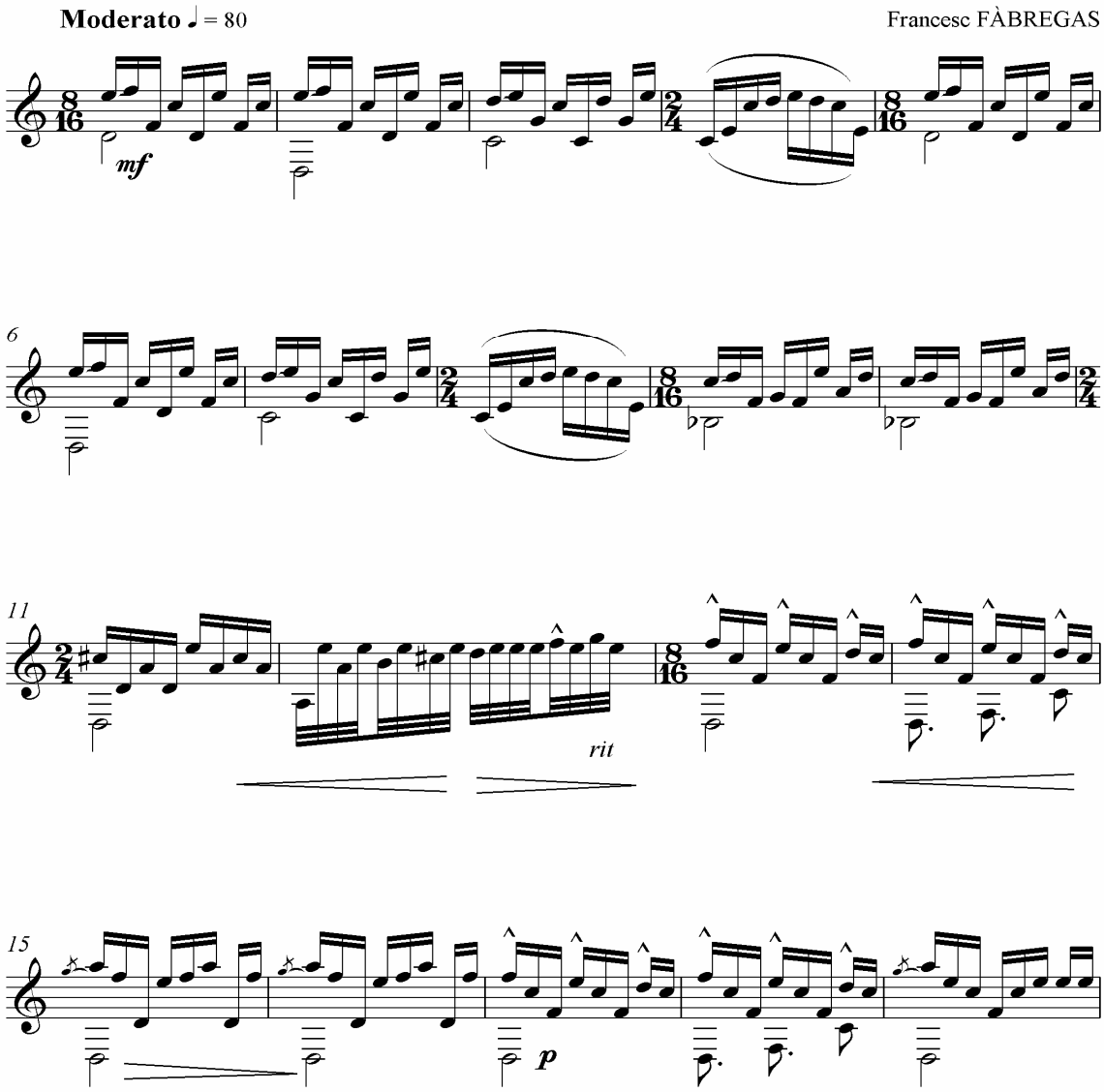
Partitura de Boig per tu

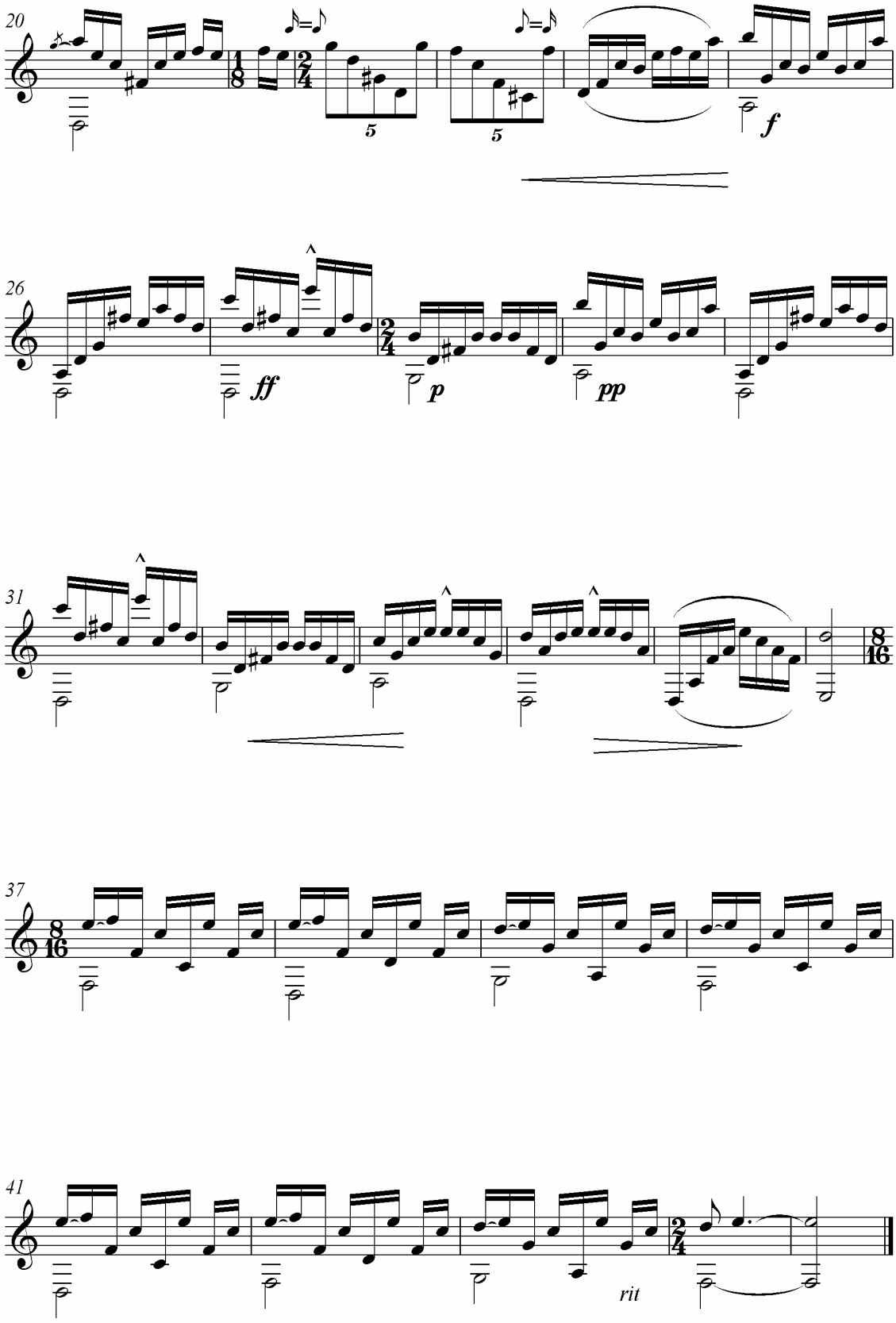
ANNEX E

5

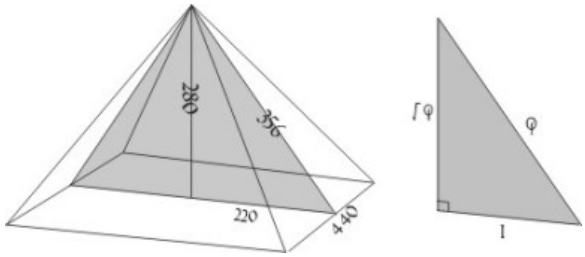
PLUJA D'ESTIU

EL NOMBRE D'OR A LA MÚSICA



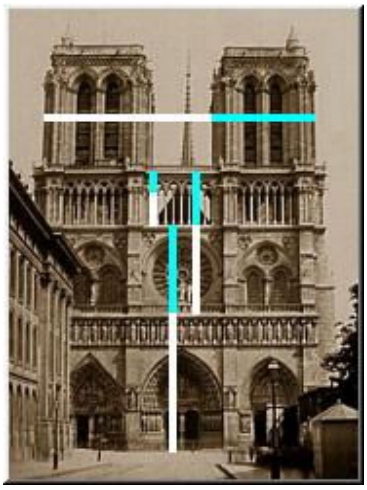

20
f
26
ff
p
pp
31
37
41
rit

ANNEX F



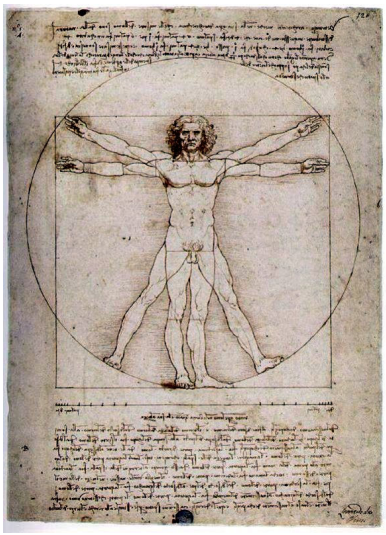
Piràmide de Khufu i esquema de les dimensions d'aquesta que mostra l'aparició del nombre d'or a la hipotenusa i altura del triangle central.

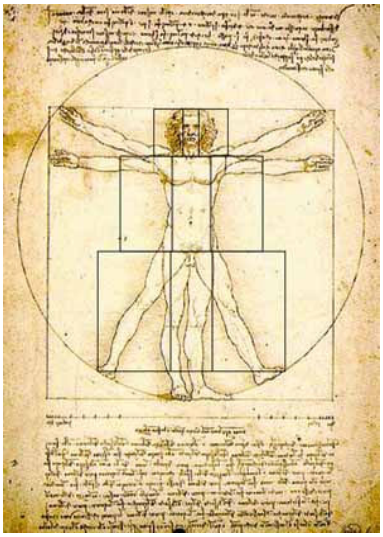
Partenó d'Atenes. Esquema de les dimensions del temple a partir del qual observem que està inscrit en un rectangle auri.



Catedral de París, Notre Dâme, i esquema dels segments auris inscrits en la façana d'aquesta.

ANNEX G



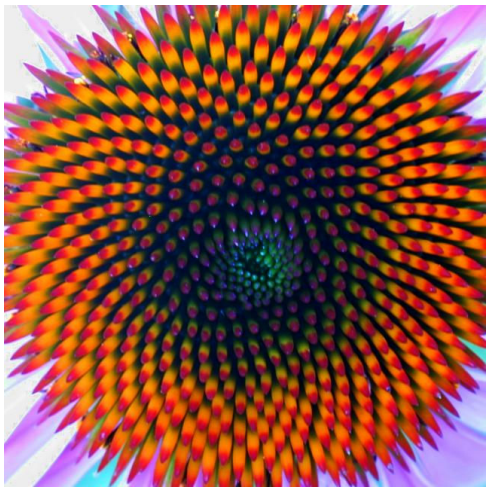


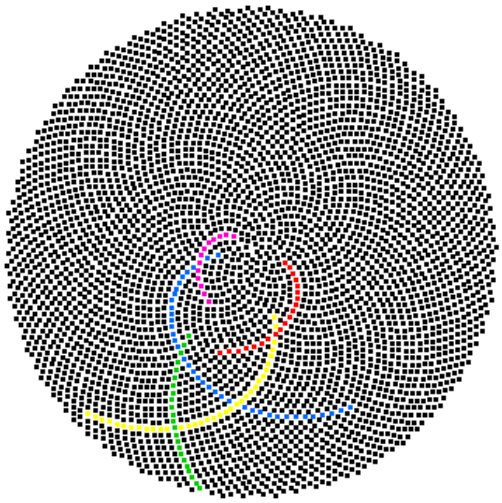
Home de Vitruvi, il·lustrat per Leonardo Da Vinci, compost a partir de rectangles auris.

Sagrada Família, de Michelangelo, composta seguint l'estructura del pentàgon estrellat.

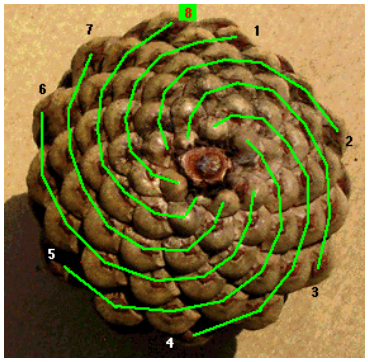
Sant Sopar, de Dalí. L'artista va inscriure l'obra en un rectangle auri. Al fons, s'insinua el dodecaèdre, un dels sòlids platònics directament relacionats amb la proporció àuria.

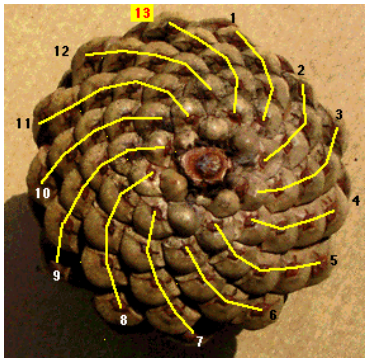
ANNEX H



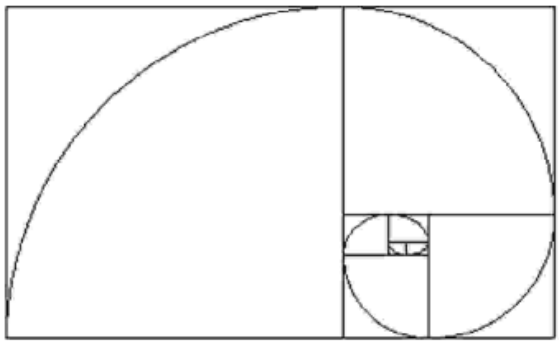


Llavors d'una flor que mostren una distribució seguint l'estructura de l'espiral àuria.





Pinya i esquemes que mostren les espirals de la base. Observem un total de 8 espirals cap a la dreta i 13 espirals cap a l'esquerra. El quocient d'ambdós nombres condueix al nombre d'or.



Esquelet del mol·lusc Nautilus i esquema que mostra la sorprenent coincidència amb l'espiral àuria.

ANNEX I

Índex de cançons del CD adjunt:

1.Primer moviment de *la sonata en sol menor* de J.S.Bach BWV 1001.
2.Preludi en Re major de J.S.Bach BWV 850.
3.Boig per tu.
4.Boig per tu modificat.
5.Pluja d'estiu.

Programari informàtic musical utilitzat:

-Cakewalk.
-Sibelius.